STATISTICA, anno LXV, n. 3, 2005

CONFRONTO FRA ALCUNI STIMATORI NON PARAMETRICI APPLICATI ALLA DISTRIBUZIONE DI WEIBULL

M. Cacciari, G. Mazzanti, G.C. Montanari

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito delle prove svolte per saggiare l'invecchiamento elettrico di un materiale isolante solido, gli N provini del campione possono essere assoggettati fino alla scarica ad una rampa di tensione, in modo da stimare il valore della rigidità dielettrica, sia ad una tensione di valore efficace costante, per rilevare il tempo corrispondente al guasto, così da ricavare una stima della durata. I valori rilevati in queste prove sono delle grandezze di tipo aleatorio a cui si può attribuire l'appartenenza ad una ben definita famiglia di distribuzioni. Nello studio dell'invecchiamento elettrico è usuale supporre che i valori sperimentali di prove di vita si adattino (previo superamento di un test d'appartenenza) ad una distribuzione di Weibull a due parametri definita come:

$$F(t, \alpha, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \qquad t > 0 \tag{1}$$

Il parametro α (>0) è detto di scala e β (>0) di forma mentre F è la funzione di ripartizione. Con il valore, t (reale positivo), si indica il tempo al guasto o la rigidità dielettrica applicata, a seconda del tipo di prova svolta, mentre con T si indica la variabile aleatoria, tale che la probabilità di realizzare valori $\leq$ alla quantità t vale appunto $P_r(T \leq t; \alpha, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$.

Se i dati sperimentali t_i ed i relativi valori dell'EDF campionaria sono riportati sulla carta di probabilità di Weibull è possibile verificare l'adeguatezza o meno del modello mediante la seguente linearizzazione dell'eq. (1):

$$\ln[-\ln(1 - \hat{F}_i)] = \beta(\ln t_i - \ln \alpha), \quad i = 1, 2, ..N. \tag{2}$$

Il valore dell'EDF $\hat{F}_i = \#(T \le t)/N$ è stima consistente uniformemente in t di $F(t_i;\alpha,\beta)$. Una valutazione sulla bontà d'adattamento dei dati sperimentali all'ipotesi statistica è fornita dal coefficiente di correlazione lineare, r. Si accetta l'adattamento weibulliano quando il valore espresso da r è superiore od uguale al valore critico prefissato (che può essere ricavato con il metodo Monte Carlo in funzione della numerosità, N, del campione (Abernethy, 1996)). Nelle analisi affidabilistiche sui sistemi elettrici si ricorre spesso per ragioni tecnico-economiche all'utilizzo di campioni di numerosità ridotta, ad esempio tra 6 e 20. La scarsa disponibilità di dati sperimentali spinge i ricercatori del settore ad esaminare i metodi prescelti per le stime di α e β. Ad esempio il metodo della regressione lineare (Least-Squares Regression, LSR ordinari) permette di stimare β mediante l'espressione:

$$\hat{\beta}_{LSR} = \sum_{i=1}^{N}(u_i - \overline{u})(z_i - \overline{z}) / \sum_{i=1}^{N}(u_i - \overline{u})^2, \tag{3}$$

avendo posto $u_i = \ln t_i$, $z_i = \ln[-\ln(1-\hat{F}_i)]$, $\overline{u} = \sum_i u_i / N$, $\overline{z} = \sum_i z_i / N$ (Sprent, 1990; Jacquelin, 1997; Birkes e Dodge, 1993). La stima del parametro di scala si ottiene da:

$$\hat{\alpha}_{LSR} = \exp\left(\overline{u} - \frac{\overline{z}}{\hat{\beta}_{LSR}}\right). \tag{4}$$

Agli N valori osservati t_i, qualora siano tutti distinti, com'è nelle assunzioni implicite del lavoro, dove $t_1 < t_2 < ... < t_N$, si associa la corrispondente stima dell'EDF, $\hat{F}_i$. Tale stima è usualmente assunta uguale alla mediana della sua funzione di ripartizione mediante la risoluzione numerica dell'equazione seguente (Fothergill, 1990), (Jacquelin, 1997):

$$0.5 = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!}\int_0^{\hat{F}_i} \phi^{i-1}(1-\phi)^{N-i} d\phi. \tag{5}$$

Anziché risolvere l'eq.(5), si fa ricorso alle soluzioni approssimate di $\hat{F}_i$ dovute a Bénard (Fothergill, 1990; Jacquelin, 1993):

$$\check{F}_i = \sum_{1}^{N} \frac{i - .3}{N + 0.4}, \quad i = 1, 2, ... N. \tag{6}$$

Analisi sul calcolo di $\hat{\beta}_{LSR}$ ed $\hat{\alpha}_{LSR}$, proprie della regressione di u_i su z_i (indicata in seguito come LSR_a) sono state svolte da Abernethy (Abernethy, 1996) utilizzando 1000 replicazioni simulative dell'esperimento che ha prodotto t_i ($i = 1, 2, ..N$). Le stime in oggetto risultano asintoticamente non distorte (in media) con un valore di distorsione minore rispetto a quello rilevabile invece con la regressione di z_i su u_i (indicata come LSR_b (White, 1969)). Secondo alcuni Autori (Lawson *et al.*, 1997) le stime di $\hat{\beta}_{LSR}, \hat{\alpha}_{LSR}$ sono invece influenzate dai pochi valori sperimentali anomali del campione (in numero strettamente minore di $N/2$). Sono ritenuti dati anomali (*outliers*) perché non in accordo col modello weibulliano (si è esclusa la presenza d'errori sia sulle provette che sugli strumenti nella fase di rilevazione). Un valore t_i è considerato anomalo se il residuo e_i:

$$|e_i| = \left|\ln[-\ln(1-\hat{F}_i)] + \hat{\beta}\ln\hat{\alpha} - \hat{\beta}\ln t_i\right| \ , \ i = 1,2... N \ , \tag{7}$$

è tale che:

$$\frac{|e_i|}{\sigma_e} \geq k_\sigma \ . \tag{8}$$

I valori $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ sono le stime di α e β calcolate con la presenza dei valori anomali; il valore soglia k_σ è stato assunto, nel lavoro, pari 1.50, mentre il valore dello scarto quadratico medio σ_e è uguale a (Birkes e Dodge, 1993):

$$\sigma_e = 1.483 Mediana|e_i| \ . \tag{9}$$

Nel lavoro si espone una rassegna comparativa di stimatori non parametrici per i parametri della distribuzione di Weibull unitamente ad una presentazione di nuovi stimatori. Si tratta di un problema certamente interessante per le applicazioni affidabilistiche in cui è necessario talvolta determinare stime statistiche basandosi sui risultati di pochi esperimenti ed in cui, pertanto, si rendono indispensabili valutazioni ottenibili tramite la superposizione di un modello distributivo.

2. ALCUNI METODI ROBUSTI

La procedura proposta per il calcolo dei parametri della distribuzione di Weibull è un perfezionamento dei metodi di regressione robusta di Theil e di Jacquelin che non sono influenzati dai pochi valori anomali del campione (Jacquelin, 1996).

2.1. *I metodi di Theil e di Jacquelin*

Il metodo di Theil è basato sul seguente approccio. Si attribuisce a ciascuno dei valori t_i (i = 1,2,..., N), ordinati in senso crescente, la stima $\check{F}_i$. Sulla carta di probabilità di Weibull le coppie, $t_i, \overset{\vee}{F}_i$ permettono di determinare $M = N(N\text{-}1)/2$ coefficienti di forma in corrispondenza delle M combinazioni senza ripetizione delle coppie di punti immagine (Sprent, 1989):

$$\beta_{fg} = \frac{\ln[-\ln(1-\overset{\vee}{F}_g)] - \ln[-\ln(1-\overset{\vee}{F}_f)]}{\ln t_g - \ln t_f}, \ f = 1,2,..., N\text{-}1;\ g = f+1,..., N. \quad (10)$$

Dopo aver calcolate le stime β_{fg} ed averle ordinate in senso crescente si assume come stima del parametro di forma, definito come $\overset{\vee}{\beta}_{Tb0.5}$, la mediana di tale insieme:

$$\overset{\vee}{\beta}_{Tb0.5} = Mediana(\beta_{fg}), \quad (11)$$

mentre, ad esempio, nel metodo Jacquelin il $P^{**}_{N_R} - esimo$ quantile, $\beta_{JacP^{**}}$, è assunto come stima del parametro di forma (Jacquelin, 1996), (Cacciari *et al.*, 2002):

$$\beta_{JacP^{**}} = \beta_{fg}(P^{**}_{N_R}). \quad (12)$$

I valori di $P^{**}_{N_R}$ sono legati alla numerosità N del campione dalla relazione:

$$P^{**}_{N_R} = a_1 + b_1 N_R + b_2 N_R^{\ 1.25}, \qquad N_R = N. \quad (13)$$

I valori di $P^{**}_{N_R}$ così calcolati, dove i coefficienti a_1, b_1, b_2 sono uguali a 0.436500845, $3.5731122\ 8*10^{-3}$, - $4.78076096*10^{-4}$, differiscono al massimo dello 0.02% rispetto a quelli ottenuti con il metodo Monte Carlo ma possono essere ricavati, in modo più laborioso, con il procedimento teorico sviluppato da Jacquelin (Jacquelin, 1996) a cui si rimanda.

Le stime, $\overset{\vee}{\alpha}_{Tb0.5}$, $\alpha_{Jac0.5}$ si calcolano per ambedue i metodi con un procedimento simile. Avendo ricavato le stime $\overset{\vee}{\beta}_{Tb0.5}$, $\beta_{JacP^{**}}$ si determina la stima parziale α_i in corrispondenza di ciascun valore t_i del campione con la relazione seguente:

$$\alpha_i = \frac{t_i}{\left[-\ln\left(1-\overset{\vee}{F}_i\right)\right]^{\left(\frac{1}{\overset{\vee}{\beta}}\right)}}, \qquad i = 1,2,....., N, \quad (14)$$

dove $\check{\beta}$, per comodità, una volta corrisponde alla stima di $\check{\beta}_{Th0.5}$, l'altra a quella di $\beta_{JacP^{**}}$. La stima del parametro di scala, $\check{\alpha}$, che corrisponde nel primo caso a $\check{\alpha}_{Th0.5}$, e nel secondo a $\alpha_{Jac0.5}$, è assunta uguale alla mediana delle stime parziali α_i :

$$\check{\alpha} = Mediana(\alpha_i)\,. \tag{15}$$

2.2. *Il metodo proposto*

Il metodo proposto permette di calcolare la stima di β con l'introduzione della metodologia Jackknife nella procedura di Jacquelin. Si ordinano in senso crescente gli N valori sperimentali del campione. A partire dal primo, se ne estrae uno in modo che i rimanenti formino un sub-campione di N^* dati, poi si reintegra il dato estratto nell'insieme originario. Si ripete l'operazione estraendo il dato d'ordine successivo e così via fino a rendere disponibili $\upsilon = 1, 2..., N$ sub-campioni diversi. Per ciascuno si determinano, secondo la procedura di Jacquelin, $M^* = N^*(N^*\text{-}1)/2$ coefficienti di forma:

$$\beta_{f^* g^*, \upsilon} = \frac{\ln[-\ln(1-\hat{F}_{g^*})] - \ln[-\ln(1-\hat{F}_{f^*})]}{\ln t_{g^*} - \ln t_{f^*}} \quad , \quad f^* = 1,2,..., N^*\text{-}1;$$

$$g^* = f^* + 1,..., N^*. \quad N^* = N-1; \qquad \upsilon = 1,2,..N\,. \tag{16}$$

In particolare i valori di t_{j^*} , e $\hat{F}_{j^*}$ valgono:

$$\upsilon = N, \quad \hat{F}_{j^*} = \check{F}_i\,,\ t_{j^*} = t_i\,, \quad j^* = i, \quad j^* = 1,2,..N^*,$$

$$\upsilon = 1, \quad \hat{F}_{j^*} = \sum_1^{j^*} \frac{1}{N+.4} + \frac{\check{F}_1}{N^*}\,,\ t_{j^*} = t_{i+1}\,, \quad j^* = i, \quad j^* = 1,2,..N^*,$$

$$\upsilon = 2,..N^*, \quad \hat{F}_{j^*} = \sum_1^{j^*-1} \frac{1}{N+.4} + \check{F}_1 + \frac{1}{(N-\upsilon)(N+.4)}\,,\ t_{1^*} = t_1\,,\ \hat{F}_{1^*} = \check{F}_1\,,$$

$$i = j^* = 2,..N^*, t_{j^*} = t_i \quad \forall j^* < \upsilon\,,\ t_{j^*} = t_{i+1} \quad \forall j^* \geq \upsilon\,. \tag{17}$$

Si ordinano in senso crescente le stime $\beta_{f^* g^*}$ e si assume come stima del parametro di forma del sub-campione, definito come β_υ^*, il $P_{N_R}^{**} - esimo$ quantile di tale insieme (nell'eq. (13) $N_R = N^*$). Pertanto, la stima del parametro di forma del sub-campione deve essere così definita:

$$\beta_\upsilon^* = \beta_{f^* g^*, \nu}(P_{N_R}^{**}) \qquad \nu = 1,2,\ldots N\,. \tag{18}$$

La stima del parametro di forma del campione è sufficiente considerarla uguale alla media campionaria di β_υ^* (Efron, 1982; Ardeni, 1988):

$$\beta_p^* = \sum_{\upsilon=1}^{N} \frac{\beta_\upsilon^*}{N}\,. \tag{19}$$

Ciò premesso, la stima del parametro di scala, α_p^*, è la ben nota mediana campionaria delle α_i come nei metodi di Theil e di Jacquelin:

$$\alpha_p^* = Mediana(\alpha_i)\,. \tag{20}$$

Dove la stima parziale α_i è per ciascun valore t_i uguale a:

$$\alpha_i = \frac{t_i}{\left[-\ln\left(1-\check{F}_i\right)\right]^{\left(\frac{1}{\beta_p^*}\right)}}, \qquad i = 1,2,\ldots\ldots, N\,. \tag{21}$$

3. UN CONFRONTO FRA LE STIME DEI PARAMETRI DI UNA DISTRIBUZIONE DI WEIBULL OTTENUTE CON IL METODO PROPOSTO ED ALTRI METODI

3.1. *Un confronto fra i metodi*

Nel lavoro si è proceduto ad un confronto fra le stime α, β ottenute con il metodo proposto ed i metodi LSR, di Theil, di Jacquelin a cui si è aggiunto MLE (Maximum Likelihood Estimators). Quest'ultimo è particolarmente utilizzato nelle analisi sull'invecchiamento elettrico. La stima MLE di α si ricava da:

$$\alpha_{MLE} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^{\beta_{MLE}}}{N}\right)^{\left(\frac{1}{\beta_{MLE}}\right)}, \tag{22}$$

dopo avere calcolato numericamente, β_{MLE}, per risolvere l'equazione seguente

$$\beta_{MLE}^{-1} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(\ln t_i) t_i^{\beta_{MLE}}}{\sum_{i=1}^{N} t_i^{\beta_{MLE}}} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\ln t_i}{N} = 0 . \tag{23}$$

L'accuratezza dello stimatore β_{MLE} è stata verificata nelle analisi statistiche sull'invecchiamento elettrico tramite il metodo Monte Carlo (Ross, 1994). Secondo tale analisi la media campionaria di β_{MLE} coincide con il valore β_S, valore fissato nel processo simulativo, solo se β_{MLE} è moltiplicato per un coefficiente empirico legato alla numerosità del campione. Ciò premesso, in questo lavoro come nelle analisi statistiche sull'invecchiamento elettrico si utilizza la seguente stima "aggiustata" (Ross, 1994):

$$\beta_{corMLE} = \beta_{MLE}\left(\frac{N-2}{N-0.68}\right). \tag{24}$$

3.1.1. *Comparazione fra le stime del parametro di forma*

E' noto che se la generazione di determinazioni pseudo-casuali sperimentali è immune da distorsioni di qualsiasi tipo, allora gli errori delle stime ricavate con il metodo Monte Carlo seguono le stesse leggi statistiche che regolano le stime ottenute da campioni casuali. Nelle determinazioni Monte Carlo di una v.a Weibull, con α_S e β_S fissati, i campioni seguono per costruzione la legge prescritta secondo l'espressione:

$$t_{i,j} = \alpha_S(-\ln(1-q_{ij}))^{\left(1/\beta_S\right)},\ i=1,2,\dots,N;\ j=1,2,\dots,S^{\circ}. \tag{25}$$

Per la generazione di numeri distribuiti in modo uniforme nell'intervallo (0,1), q_{ij}, si è fatto ricorso alla procedura ricorsiva di Wichmann e Hill, dove il numero pseudocasuale successivo, u_{h+1}, si ottiene da:

$$u_{h+1} = \left(\frac{X_{h+1}}{30269} + \frac{Y_{h+1}}{30307} + \frac{Z_{h+1}}{30323}\right)\text{mod}.1, \tag{26}$$

con

$$X_{h+1} = (171 X_h)\,\text{mod}.30269\,,$$
$$Y_{h+1} = (172 Y_h)\,\text{mod}.30307\,,$$
$$Z_{h+1} = (170 Z_h)\,\text{mod}.30323,$$

essendo X_h, Y_h, Z_h il seme iniziale (Lewis e Orav, 1988).

Si ritiene che $S^{\circ} = 4000$ esperimenti simulati siano sufficienti per descrivere la distribuzione campionaria delle stime di β ed α (nel seguito si farà sempre ricorso a tale numero di simulazioni). L'errore relativo percentuale commesso nello stimare i valori delle frequenze cumulate (ad es. inferiori a 0,2) relative a tali stime, è inferiore al 5% con probabilità 0,95 (Erto, 2004; Ellis e Rao Tummala, 1986).

La comparazione fra i metodi citati è basata sulla costruzione della relativa distribuzione della stima del parametro di forma in modo da poterne rilevare sia il valor medio, sia quello mediano, sia quello del $P^{**}-esimo$ quantile, indicati nelle successive tabelle come β_{medio}, $\beta_{mediana}$, $\beta_{P^{**}}$ (dove il numero d'ordine P^{**} è l'intero inferiore di $S^{\circ} \times P_{N_R}^{**}$). Anche se, è bene rilevare che nell'ambito delle ricerche sull'invecchiamento elettrico sono prescelti quegli stimatori che presentano i valori più bassi dell'errore assoluto relativo, $e_{\beta} = |\beta_S - \beta_{medio}| / \beta_S$ (IEEE, 1999).

Si è inoltre proveduto a verificare dapprima quanto influisce la scelta del seme, oppure l'ammontare di β_S o di N nella determinazione di β_{medio}, $\beta_{mediana}$, $\beta_{P^{**}}$. In uno specifico studio su S° simulazioni generate con seme differente, di cui si riportano qui solo le conclusioni, si è potuto rilevare come i rapporti fra le stime β_{medio}, $\beta_{mediana}$, $\beta_{P^{**}}$, ottenute con stimatori diversi, non evidenziano variazioni numeriche di qualche rilevanza. E' facile dimostrare che al variare di β_S, campioni determinati con la stessa sequenza v.a uniforme mantengono il rapporto fra β_S e le stime β_{medio}, $\beta_{mediana}$ e $\beta_{P^{**}}$ invariato qualunque è il metodo utilizzato. La conferma numerica è riportata in Tavola 1, dove sono raccolte le stime β_{medio}, $\beta_{mediana}$ e $\beta_{P^{**}}$ di S° simulazioni per il campione di numerosità (N=9) al variare di β_S (=1, 2, 5 con α_S =1). Come già accennato nell'introduzione si è verificato in quante delle S° replicazioni dell'esperimento si presentano dei valori anomali (secondo eq.(8) con k_{σ} pari 1.50). In Tavola 1 è riportato appunto il numero, L_A, di campioni che denotano la presenza di valori anomali.

TAVOLA 1

Stime dei valori di β_{medio}, $\beta_{mediana}$, $\beta_{P^{**}}$, L_A, ottenute con S° (=4000) simulazioni Monte Carlo (con seme ricavato mediante $X_o = 771; Y_o = 123; Z_o = 129$) per campioni di numerosità N =9 al variare di β_S =1, 2, 5 , mentre α_S =1

Metodo	β_S	β_{medio}	$\beta_{mediana}$	$\beta_{P^{**}}$	L_A
Proposto	1	0.996	0.925	0.893	2563
Proposto	2	1.993	1.850	1.787	
Proposto	5	4.984	4.6232	4.468	

L'identico procedimento simulativo è stato applicato anche a campioni di numerosità diversa, N =6,7,8,9 con $\alpha_S = 1$, $\beta_S = 1$, per la determinazione di β_{medio}, $\beta_{mediana}$, $\beta_{P^{**}}$ (L_A) mediante tutti gli stimatori illustrati in Tavola 2. Il metodo proposto (insieme a MLE) è quello che presenta gli errori relativi, $(\beta_{medio} - \beta_S)/\beta_S$, inferiori rispetto a quelli degli altri metodi. Inoltre la stretta corrispondenza fra il valore di β_S, e la media campionaria delle stime β_P^* tende a migliorare al crescere di N. Il metodo LSR_b presenta invece una relazione analoga fra β_S e la mediana campionaria di $\hat{\beta}_{LSR_b}$ (per il calcolo di $\hat{\beta}_{LSR_b}$ si rimanda al lavoro di White (White, 1969)).

3.1.2. *Comparazione fra le stime del parametro di scala*

Le determinazioni delle v.a Weibull di Tavola 2 permettono anche di costruire l'istogramma delle frequenze cumulate delle stime α calcolate con tutti metodi indicati. Nella Tavola 3 sono riportati gli andamenti di α_{medio}, $\alpha_{mediana}$, $\alpha_{P^{**}}$ al variare della numerosità, N =6,7,8,9 (al solito i valori della mediana e del percentile $P^{**} - esimo$ forniscono un'idea dell'andamento delle distribuzioni campionarie). Questa comparazione evidenzia come il metodo proposto è quello che presenta gli errori relativi, $(\alpha_{medio} - \alpha_S)/\alpha_S$, inferiori rispetto a quelli degli altri metodi.

TAVOLA 2

Valori di β_{medio}, $\beta_{mediana}$, $\beta_{P^{**}}$, L_A stimati i metodi LSR, proposto,Theil, Jacquelin e MLE per campioni di numerosità N = 6,7, 8, 9 ottenuti mediante S° =4000 simulazioni (stesso seme di Tavola 1 $X_o = 771; Y_o = 123; Z_o = 129$) e $\alpha_S = 1$, $\beta_S = 1$

Metodo	N	β_{medio}	$\beta_{mediana}$	$\beta_{P^{**}}$	L_A
LSR_a	N=6	1.031	0.922	0.881	1070
LSR_a	N=7	0.987	0.902	0-862	2045
LSR_a	N=8	0.977	0.913	0.803	2347
LSR_a	N=9	0.970	0.910	0.875	2563
Metodo-proposto	N=6	1.055	0.920	0.884	
Metodo-proposto	N=7	1.019	0.917	0.864	
Metodo-proposto	N=8	1.006	0.918	0.888	
Metodo-proposto	N=9	0.997	0.925	0.893	
LSR_b	N=6	1.140	1.020	0.962	
LSR_b	N=7	1.086	0.985	0.941	
LSR_b	N=8	1.067	0.993	0.953	
LSR_b	N=9	1.054	0.981	0.942	
Th	N=6	1.231	1.071	1.016	
Th	N=7	1.163	1.038	0.992	
Th	N=8	1.143	1.040	0.998	
Th	N=9	1.125	1.040	1.002	
MLE	N=6	1.018	0.902	0.861	
MLE	N=7	0.998	0.905	0.868	
MLE	N=8	1.001	0.927	0.892	
MLE	N=9	1.001	0.934	0.904	
JAC	N=6	1.109	0.974	0.922	
JAC	N=7	1.069	0.959	0.913	
JAC	N=8	1.057	0.969	0.930	
JAC	N=9	1.053	0.977	0.962	

Dalle stime α_{medio}, $\alpha_{mediana}$, $\alpha_{P^{**}}$ raccolte nella Tavola 4 e relative alle stime di α_P^* ottenute con l'insieme delle determinazioni delle v.a Weibull, con β_S (=1, 2, 5) e α_S =1 utilizzate nella Tavola 2 per un campione di numerosità (N=9), si rileva come al crescere di β_S migliori l'approssimazione di α_{medio} rispetto a α_S.

TAVOLA 3

Valori di α_{medio}, $\alpha_{mediana}$, $\alpha_{P^{**}}$, stimati con i metodi LSR, proposto, Theil, Jacquelin e MLE per campioni di numerosità N = 6,7, 8, 9 ottenuti mediante S° =4000 simulazioni (stesso seme di Tavola 1 $X_o = 771; Y_o = 123; Z_o = 129$). $\alpha_S = 1$, $\beta_S = 1$

Metodo	N	α_{medio}	$\alpha_{mediana}$	$\alpha_{P^{**}}$
LSR_a	N=6	1.121	1.050	0.989
LSR_a	N=7	1.101	1.048	0.998
LSR_a	N=8	1.096	1.047	1.000
LSR_a	N=9	1.090	1.042	1.003
Metodo-proposto	N=6	1.028	0.955	0.905
Metodo-proposto	N=7	1.019	0.970	0.920
Metodo-proposto	N=8	1.020	0.973	0.929
Metodo-proposto	N=9	1.024	0.980	0.941
LSR_b	N=6	1.061	0.993	0.937
LSR_b	N=7	1.045	0.997	0.948
LSR_b	N=8	1.042	0.995	0.954
LSR_b	N=9	1.037	0.995	0.955
Th	N=6	1.063	0.991	0.933
Th	N=7	1.040	0.987	0.933
Th	N=8	1.038	0.992	0.945
Th	N=9	1.033	0.988	0.952
MLE	N=6	0.947	0.880	0.830
MLE	N=7	0.978	0.928	0.881
MLE	N=8	0.955	0.917	0.872
MLE	N=9	0.961	0.926	0.889
JAC	N=6	1.081	1.016	0.964
JAC	N=7	1.062	1.008	0.956
JAC	N=8	1.055	1.009	0.965
JAC	N=9	1.049	1.009	0.993

TAVOLA 4

Stime dei valori di α_{medio}, $\alpha_{mediana}$, $\alpha_{P^{**}}$, ottenute con S° (=4000) simulazioni Monte Carlo (stesso seme di Tavola 1 $X_o = 771; Y_o = 123; Z_o = 129$) per campioni di numerosità N =9 al variare di β_S =1, 2, 5 , mentre α_S =1

Metodo	β_S	α_{medio}	$\alpha_{mediana}$	$\alpha_{P^{**}}$
Proposto	1	1.024	0.980	0.941
Proposto	2	0.994	0.989	0.969
Proposto	5	0.994	0.996	0.987

3.1.3. *Comparazione fra diversi metodi mediante indici*

Inoltre si sono confrontate le risposte dei vari metodi al test di Lancaster–Quade, all'indice d'accostamento ed a quello dello scostamento assoluto massimo ("Sup-norm", Titterington *et al.*, 1985) in base alle stime α, β ricavate dalle S°

simulazioni di Tavola 2. A mo' d'esempio applicativo si riportano i risultati relativi al campione di numerosità $N = 7$. E' noto che il test Lancaster-Quade saggia la condizione $\alpha = \alpha_S \wedge \beta = \beta_S$. Essa è verificata se la quantità l_{LQ} che si presenta come determinazione della variabile casuale L, approssimativamente di tipo $\chi^2(2)$, assume o il valore 0 (o, comunque, un valore prossimo allo 0, per il calcolo di l_{LQ} si rimanda al lavoro di Landenna e Marasini (Landenna e Marasini, 1990)). Dall'indagine svolta risulta che MLE non supera il test nel 2.5% dei casi, mentre tutti gli altri metodi verificano l'ipotesi sotto la condizione che c'è una probabilità del 5% che $\chi^2(2)$ sia maggiore di 5.99.

L'indice d'accostamento è l'errore medio quadratico, $I_{2\varphi}$, definito come (Zani, 1982):

$$I_{2\varphi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{F}_i - \varphi_i)^2}{N}} . \tag{27}$$

Sfruttando le stesse simulazioni si è confrontato l'indice $I_{2\varphi}$, calcolato con le stime del metodo proposto (indicato come secondo metodo), con quello ottenuto con le stime di uno degli altri metodi (indicato come primo metodo nella Tavola 5). Il numero delle volte che l'indice d'accostamento calcolato col primo metodo è superiore all'altro è stato registrato e riportato in valore percentuale, $(n(I_2(1)) > n(I_2(2))\%)$, sulla Tavola 5. In definitiva con l'indice $I_{2\varphi}$ si mettono a confronto i valori delle frequenze cumulate φ_i imposte ($\varphi_i = q_{ij} = u_{h+1}$) con quelli $\hat{F}_i$ ottenibili dall'eq. (1) introducendo le stime di α e β. Le stime β_p^*, α_p^*, insieme alle stime MLE, forniscono nella maggior parte delle simulazioni di Tavola 5 un valore $I_{2\varphi}$ minore rispetto a quello rilevabile con gli altri metodi. E' facile riconoscere che l'introduzione delle stime $\check{F}_i$ al posto dei valori φ_i nell'eq. (27) ridefinisce l'indice d'accostamento nella seguente formulazione:

$$I_{2F} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{F}_i - \check{F}_i)^2}{N}} . \tag{28}$$

Nella Tavola 5 viene inoltre riportato il numero percentuale, $n(I_{2F})\%$, di quante volte il valore I_{2F}, calcolato col primo metodo è maggiore di quello determinato con il secondo. Da tale esame risulta che le stime β_p^*, α_p^* (unitamente a quelle di Jacquelin) forniscono nella maggior parte delle simulazioni il migliore accostamento delle stime $\hat{F}_i$ ai valori $\check{F}_i$ rispetto a quello rilevabile con gli altri metodi.

TAVOLA 5

Valore percentuale del numero di volte in cui, su S° (=4000) simulazioni Monte Carlo, per campioni di numerosità N =7, il primo metodo preso in considerazione è superiore a quello del metodo proposto in base all'indice d'accostamento $n(I_{2F})\%$ e $(n(I_2(1)) > n(I_2(2))\%$ ed all'indice di scostamento assoluto massimo $n(d_M(1)) > (d_M(2)))\%$

Primo metodo	Secondo metodo	$n(I_{2F})\%$	$n(d_M(1) > d_M(2))\%$	$n(I_2(1)) > n(I_2(2))\%$
Theil	Met. pro	53.2%	47.4%	56.1%
Jac	Met. pro	48.3%	48.3%	54.1%
MLE	Met. pro	51.0%	52.5%	44.3%
LSR$_a$	Met. pro	49.3%	52.8%	52.1%
LSR$_b$	Met. pro	53.6%	40.0%	52.8%

Per ognuna delle simulazioni riportate nella Tavola 5 si è calcolato anche il valore dello scostamento assoluto massimo che può essere assunto come criterio della robustezza (Lecoutre e Tassi, 1987). L'indice "Sup-norm" si determina come:

$$d_M(\hat{F}_i, \check{F}_i) = Massimo\ (d_S(\hat{F}_i, \check{F}_i)) \qquad i \in N. \tag{29}$$

dove $d_S(\hat{F}_i, \check{F}_i)$, è lo scostamento assoluto fra i valori $\check{F}_i$ imposti e le EDF ricavate mediante le stime di α, β. Nella Tavola 5 è riportato in valore percentuale, $n(d_M(1)) > (d_M(2))\%$, il numero delle volte che l'indice, $d_M(\hat{F}, \check{F})$ calcolato con le stime determinate con il primo metodo è superiore a quella del secondo. Solo il metodo LSR$_b$ presenta risposte percentualmente migliori rispetto a quelle degli altri che si equivalgono. Avendo richiamato a sufficienza le proprietà a garanzia della validità degli stimatori dei parametri della distribuzione di Weibull, che riflettono in modo sensibile l'effetto di tutti i dati sperimentali, è interessante osservare che il metodo proposto presenta spesso risposte migliori, in media, a tutti gli indici raccolti nella Tavola 5.

4. CONCLUSIONE

In questo lavoro si è presentata l'applicazione Jackknife al metodo di Jacquelin per stimare i parametri della distribuzione di Weibull. Con una serie di simulazioni Monte Carlo si è proceduto al confronto fra le stime dei due parametri ottenute con il metodo proposto e quelle ricavabili con i metodi più noti in letteratura, come quello di Theil, di Jacquelin, del MLE e del LSR. Questa metodologia alternativa a quella LSR, o a quella di Theil è da impiegarsi in special modo quando nel campione di numerosità ridotta vi sono risultati outliers, in numero strettamente minore di $N/2$, che possono influenzare significativamente le stime.

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazionee MARIO CACCIARI
Università di Parma

Dipartimento di Ingegneria Elettrica GIOVANNI MAZZANTI
Università di Bologna GIAN CARLO MONTANARI

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

R.B. ABERNETHY (1996), *The new Weibull handbook*, 2nd , Abernethy, North Palm Beach.

P. G. ARDENI (1988), *Bootstrapping, Jackknife, e stimatori James-Stein*, "Statistica", XLVIII, pp. 29-48.

D. BIRKES, Y. DODGE (1993), *Alternative methods of regression*, Wiley and Sons, New York.

M. CACCIARI, G. MAZZANTI, G. C. MONTANARI, J. JACQUELIN (2002), *A robust technique for the estimation of the two-parameter Weibull function for the complete data sets*, "Metron", pp. 67-92.

R.B. EFRON (1982), *Computer intensive methods in statistics*, in J. TIAGO de OLIVEIRA, B. EPSTEIN (eds), "Some Recent Advances in Statistics", Academic Press, London.

W.C. ELLIS, V.M. RAO TUMMALA (1986), *Minimum expected loss estimators of the shape and scale parameters of the Weibull distribution*, "IEEE Transaction on Reliability", 35, pp. 212-215.

P. ERTO (2004), *Probabilità e statistica per le scienze e l'ingegneria*, McGraw-Hill, Milano.

J. FOTHERGILL (1990), *Estimating the cumulative probability of failure data. Points to be plotted on Weibull and other probability paper*, "IEEE Transaction on Electrical Insulation", 25, pp. 489-492.

IEEE (1999), *Guide for statistical analysis of electrical insulation breakdown data. Draft 6*, IEEE, New York.

J. JACQUELIN (1993), *Reliable algorithm for the exact median rank function*, "IEEE Transaction on Electrical Insulation", 28, pp. 168-171 ed Erratum, 28, pp. 892.

J. JACQUELIN (1996), *Separative method for parameter estimation of multiparameter distributions*, Alcatel Alsthom Recherche, Marcoussis.

J. JACQUELIN (1997), *Elemental Percentile method for parameter estimation of multi-parameter distribution*, Alcatel Alsthom Recherche, Marcoussis.

G. LANDENNA, D. MARASINI (1990), *Metodi statistici non parametrici*, il Mulino, Bologna.

C. LAWSON, J. B. KEATS, D. C. MONTGOMERY (1997), *Comparison of robust and least-squares regression in computer-generated probability plots*, "IEEE Transaction on Reliability", 46, 1, pp. 108-115.

J. P. LECOUTRE, P. TASSI (1987), *Statistique non parametrique et robustesse*, Economica, Paris.

P.A.W. LEWIS, E.J. ORAV (1988), *Simulation Methodology for Statisticians Operations Analysis, and Engineers*, Wodworth and Brooks/Cole, Pacific Grove.

R. ROSS (1994), *Formulas to describe the bias and standard deviation of the ML-estimation Weibull shape parameter*, "IEEE Transaction on Dielectrics and Electrical Insulation", 1, pp. 243-247.

P. SPRENT (1990), *Applied nonparametric statistical methods*, Chapman and Hall, London.

D.M. TITTERINGTON, A.F. SMITH, U.E. MAKOV (1985), *Statistical analysis of finite mixture distributions*, Wiley and Sons, New York.

H. J.S. WHITE (1969), *The moments of log Weibull order statistics*, "Technometrics", 11, n. 2, pp. 373-386.

S. ZANI (1982), *Indicatori statistici della congiuntura*, Loescher, Torino.

RIASSUNTO

Confronto fra alcuni stimatori non parametrici applicati alla distribuzione di Weibull

Lo scopo dell'indagine è descrivere ed analizzare una procedura di calcolo per la stima accurata e robusta dei due parametri della distribuzione di Weibull. Questo procedimento è uno sviluppo dei metodi robusti di Theil e Jacquelin alla metodologia jackknife.

Con una serie di simulazioni Monte Carlo si è proceduto al confronto fra le stime dei due parametri ottenute con il metodo proposto e quelle ricavabili con i metodi più noti in letteratura, come quello di Theil, di Jacquelin, del MLE e del LSR. Questa metodologia alternativa a quella LSR, o a quella di Theil è da impiegarsi in special modo quando nel campione di numerosità ridotta vi sono risultati outliers che possono influenzare significativamente le stime.

SUMMARY

Analysis of the difference between some estimators of the two-parameter Weibull distribution

The goal of the statistical survey is to study a procedure for the calculation of the two parameters of the Weibull distribution, which is both accurate and robust. This proposed method is based on a "non-parametric" methodology that employs an extension of jackknife procedure applied to Jacquelin method. The robustness and accuracy of the proposed methodology are compared with the other techniques used in the literature such as Theil and Jacquelin procedure, LSR as well as MLE. It is also shown that this method provides accurate estimates, particularly for samples of data presenting *outliers*.