

## CAOS, STATISTICA E METODI DI RICAMPIONAMENTO (\*)

S. Giannerini, R. Rosa

## 1. INTRODUZIONE

La teoria del caos si propone di affrontare, in prima analisi, lo studio di sistemi che esibiscono una complessa evoluzione temporale mediante modelli costruiti su pochi gradi di libertà, descritti quindi da un numero esiguo di equazioni differenziali (o alle differenze). Il campo di ricerca della teoria del caos si diffonde in varie discipline: dalla fisica all'economia, dalla chimica alla medicina, dall'ecologia alla biologia, ecc... I sistemi studiati sono assai diversi l'uno dall'altro: laser, fenomeni atmosferici, parti del corpo umano, cellule, mercati, e così via. I modelli di tali sistemi però condividono la stessa struttura, sono tutti modelli *meccanici*. Nessun equivoco. Non si allude alla visione filosofica ottocentesca secondo cui qualunque fenomeno poteva, o avrebbe potuto, essere descritto e spiegato dalle leggi della meccanica. Qui si vuole intendere che per lo studio dei fenomeni caotici è conveniente porsi nel quadro di riferimento della meccanica classica, sfruttando a fondo l'apparato concettuale e tecnico di tale disciplina. Questa scelta ha imposto un linguaggio comune agli studiosi del caos, così il genetista, il fisico, l'economista quando parlano, per esempio, di "ricostruzione dello spazio delle fasi" o di "divergenza esponenziale delle traiettorie" sanno di parlare degli stessi concetti.

Allo statistico i sistemi caotici si pongono quale sfida per affrontare lo studio di fenomeni complessi in una prospettiva inconsueta rispetto a quella tradizionale. Come è stato scritto "il caos offre l'affascinante possibilità di descrivere la casualità come il *risultato* di un processo deterministico noto" (Chatterjee e Yilmaz, 1992, corsivo degli autori). La via "tradizionale" per spiegare fenomeni complessi consiste nella costruzione di modelli probabilistici in cui la casualità è considerata genuinamente intrinseca al fenomeno oppure assunta sul piano epistemico. La casualità dei fenomeni caotici non è dovuta a perturbazioni esterne aleatorie incontrollabili, come gli urti delle molecole sul granello di polline e neppure è ascrivibile alla quintessenziale *Unbestimmtheit* del mondo microscopico che impedisce la previsione dell'esatto punto di arrivo dell'elettrone quando si effettua una misura. Nulla o nessuno gioca a dadi con il sistema. È il sistema che gioca a

---

(\*) Lavoro finanziato in parte con fondi MURST 60% e MURST 40%, progetto: "Linearità e non linearità nelle dinamiche di serie storiche".

dadi con se stesso, con le equazioni che lo governano. Consideriamo una pallina appesa ad un filo oscillante nell'ambiente. La pallina, a causa degli attriti dovuti all'aria, dopo un certo tempo si fermerà. Se però alla pallina è collegato un dispositivo che agisce come una forza variabile con periodicità, le oscillazioni continueranno nel tempo. Questo semplicissimo sistema (detto "pendolo forzato" o "guidato") si lascia descrivere dalla seguente equazione derivabile dalla legge di Newton  $F = ma$ :

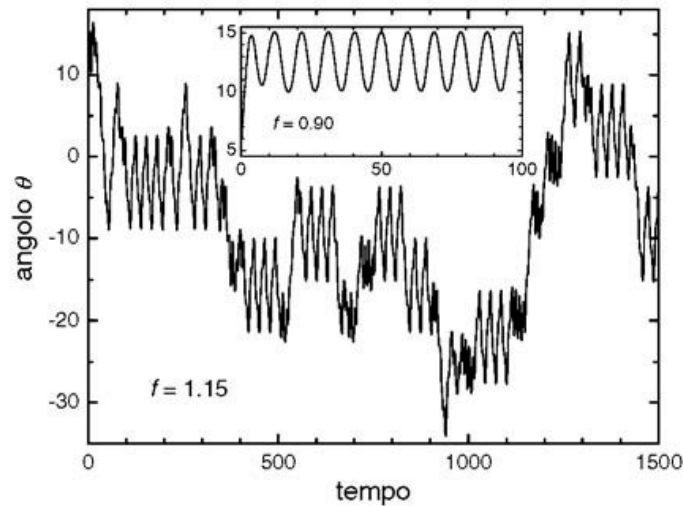


Figura 1 – Andamento dell'angolo  $\theta$  in funzione del tempo nel pendolo forzato; forza traente  $f = 0.90$  (inserto) e  $f = 1.15$ .

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sin \theta = f \cos \nu t \quad (1)$$

dove  $\theta$  è l'angolo che il filo forma con la verticale,  $\gamma$  un parametro che tiene conto degli attriti,  $f$  e  $\nu$  sono rispettivamente l'ampiezza e la frequenza angolare della forza periodica ("forza traente"). Scritta così il tempo  $t$  nella (1) è adimensionale, inoltre abbiamo usato delle unità per cui la frequenza angolare "naturale" (ossia la frequenza del pendolo in assenza di smorzamento e della forza traente) è uguale a 1. Fissati  $\gamma$  e  $\nu$ , per esempio pari rispettivamente a  $1/2$  e a  $2/3$ , il sistema offre una pluralità di comportamenti dinamici al variare di  $f$ . Rimandiamo alla letteratura (tra gli altri, Baker e Gollub, 1996) per lo studio dettagliato di questo sistema, limitiamoci ora ad alcune osservazioni. Integriamo la (1) numericamente con il metodo di Runge e Kutta del quarto ordine (Press *et al.*, 1992) con passo  $\Delta t = 0.1$  e per  $N = 15000$  iterazioni. Le condizioni iniziali sono state fissate in  $\theta = d\theta/dt = 5$ .

Rappresentiamo la dipendenza temporale di  $\theta$  quando  $f = 0.9$  (Fig. 1, inserto). Risulta chiaramente che dopo un breve intervallo transitorio le oscillazioni diventano periodiche. Per maggior visibilità, l'asse dei tempi è limitato a  $k = 1000$  iterazioni, quindi  $k \Delta t = 100$ . Se ora variamo di poco l'ampiezza della forza traente ponendo  $f = 1.15$ , l'evoluzione del sistema cambia drasticamente, come è

mostrato in figura 1: è scomparsa la periodicità e l'andamento di  $\theta$  appare del tutto irregolare. Un simile cambiamento *qualitativo* del comportamento del sistema non è conseguenza di una perturbazione esterna aleatoria né deriva da irregolarità o fluttuazioni nell'andamento della forza traente che rimane comunque rigorosamente periodico. La casualità scaturisce dalla stessa legge deterministica, espressa dall'equazione *non lineare* scritta sopra, che governa i pochi singoli componenti che costituiscono il sistema.

Ma una evoluzione irregolare come è rappresentata in figura 1 può essere anche quella di un sistema descritto da un modello probabilistico. Il problema che si pone è dunque il seguente: se un fenomeno appare *prima facie* aleatorio, siamo sicuri che ciò sia dovuto a fluttuazioni casuali di un qualche parametro che caratterizza il sistema sottostante o a imponderabili influenze dall'esterno? E che dunque il sistema debba essere studiato con tecniche stocastiche? O piuttosto stiamo osservando la complessa evoluzione di un sistema deterministico relativamente semplice, rappresentabile con un modello di poche variabili? Sfortunatamente questi due paradigmi, aleatorietà e caos deterministico, sono agli estremi di una incerta terra di nessuno dove spesso sfumano e si mescolano le proprietà dei fenomeni che si presentano in natura e che, con i nostri modelli, tentiamo di costruirne un'immagine dai tratti più marcatamente deterministici o stocastici. A parte sistemi certamente caotici in quanto frutto di un'accurata preparazione di laboratorio, quasi sempre nella realtà solo induttivamente, solo con una certa probabilità, si assegna il fenomeno in studio all'uno o all'altro regime.

Il problema viene affrontato partendo dalle serie temporali. In pratica, infatti, ciò che si misura è un segnale emesso dal sistema nel tempo, per esempio l'intensità della radiazione prodotta da un laser, oppure la quantità di pascolo consumata da una certa specie. Comunemente, quindi, si dispone di una sequenza di misurazioni, prese ad intervalli di tempo regolari, di una certa grandezza che dipende dallo stato del sistema. Per intraprendere la ricerca di una dinamica deterministica, intrinseca alla natura del sistema, conviene operare, per così dire, un cambiamento gestaltico: lasciare il terreno ben consolidato dei processi stocastici e porsi nella prospettiva della meccanica classica. Accanto all'arsenale di metodologie e tecniche statistiche per affrontare lo studio delle serie storiche in termini, per esempio, di spettri di potenza, trasformate di Fourier, funzioni di correlazione, ecc., subentrano ulteriori concetti e strumenti di analisi, quali lo spazio delle fasi, l'embedding, la dimensione frattale, ecc.. La nozione essenziale è lo *spazio delle fasi*.

Lo "spazio delle fasi" (o "degli stati") è una costruzione astratta che consente di rappresentare l'evoluzione dinamica del sistema in forma geometrica. Tale spazio possiede tante dimensioni quante sono il numero di variabili necessarie per definire lo stato istantaneo del sistema. Per esempio, lo stato di un punto materiale che si muove su una retta è specificato dalla sua posizione e dalla sua velocità ad un certo istante; ne segue che per questo sistema lo spazio delle fasi è un piano con le coordinate posizione e velocità. Per un sistema meccanico le coordinate dello spazio delle fasi sono comunemente le posizioni e gli impulsi "generalizzati", come coordinate lineari o angoli, velocità angolari, ecc... In un modello di un

sistema ecologico possono essere, per esempio, il numero di individui della specie in esame e il loro tasso di crescita. Nel caso precedente del pendolo forzato sono tre le variabili necessarie e sufficienti per definire lo stato del sistema. Scriviamo infatti la (1), come un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\gamma\omega - \sin \theta + f \cos \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \nu \end{aligned} \quad (2)$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare e  $\phi$  la fase della forza traente. Lo spazio delle fasi è quindi uno spazio tridimensionale i cui assi sono individuati dalla terna  $(\theta, \omega, \phi)$ . Un punto dello spazio delle fasi (“punto rappresentativo”) rappresenta lo stato istantaneo del sistema; se il sistema evolve, il punto rappresentativo si sposta percorrendo una traiettoria.

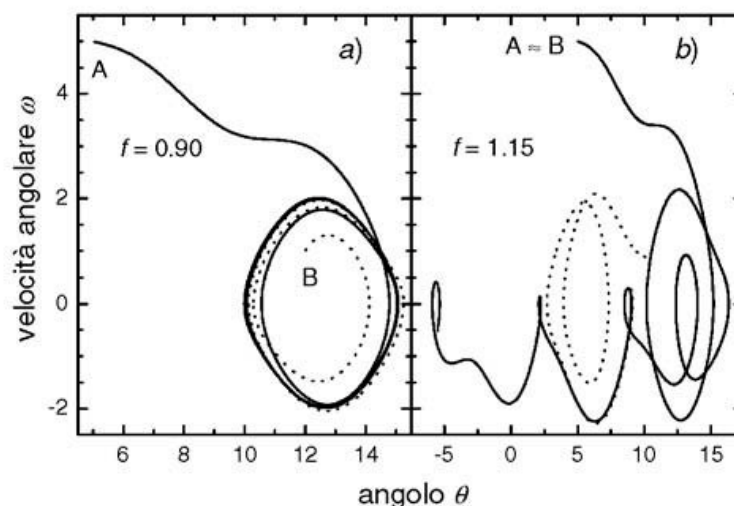


Figura 2 – Rappresentazione nel piano  $(\theta, \omega)$  dello spazio delle fasi di due traiettorie prodotte dal pendolo forzato; forza traente  $f = 0.90$  (a) e  $f = 1.15$  (b). A e B indicano i punti di partenza.

Come per tutti i sistemi deterministici, la conoscenza dell’equazione del moto nella forma (1) o (2) e dello stato del sistema ad un certo istante consente la previsione a qualsiasi tempo futuro.

In figura 2 sono riprodotte le proiezioni nel piano  $(\theta, \omega)$  di due traiettorie (condizioni iniziali indicate con A e B) percorse dal punto rappresentativo nello spazio delle fasi tridimensionale. Le figure 1 e 2 sono immagini diverse per raffigurare la stessa evoluzione del sistema, la prima nel dominio temporale, la seconda nello spazio delle fasi. Per chiarezza in figura 2 si sono riportate le traiettorie nell’arco di tempo  $0 \leq k\Delta t \leq 50$ .

Come in precedenza (figura 1, inserto), si consideri dapprima il caso in cui  $f = 0.9$  (figura 2a). Quali che siano le condizioni iniziali, cioè per qualsiasi valore iniziale dell'angolo  $\theta$  e della velocità angolare  $\omega$ , tutte le traiettorie nello spazio delle fasi, dopo l'intervallo transitorio, sono "attratte" dalla curva chiusa, detta "ciclo limite". Ben diverso è l'aspetto delle traiettorie quando  $f = 1.15$ , come appare in figura 2b. La struttura dell'attrattore è ora molto complicata o "strana", per usare il ben noto termine di Ruelle e Takens (1971). Se il tempo d'evoluzione rappresentato in figura 2b fosse più lungo, le orditure distese dal sistema nello spazio delle fasi apparirebbero manifestamente quali figure frattali, conseguenza naturale del meccanismo di "stiramento-ripiegamento" delle traiettorie. In regime caotico, traiettorie che partono da punti che distano tra loro anche di quantità infinitesime divergono (si "stirano") con velocità esponenziale. In figura 2b, per esempio, le due traiettorie (linea continua e tratteggiata) partono da due punti A e B distanti nella coordinata  $\theta$ , e solo in questa, di 0.001, ma si separano visibilmente già dopo breve tempo. Poiché la dimensione dell'attrattore nello spazio delle fasi è finita, prima o poi le traiettorie devono "ripiegarsi" su se stesse, senza però poter intersecarsi. Non dimentichiamo infatti che il sistema è deterministico e se in figura 2b le traiettorie sembrano a volte toccarsi ciò è dovuto alla proiezione sul piano  $(\theta, \omega)$ . Questo processo di stiramento e ripiegamento avviene molte, molte volte, e il risultato è un oggetto stratificato, intermedio tra una superficie e un volume, invariante rispetto al cambiamento di scala o "autosomigliante". A causa di questa instabilità esponenziale, una imprecisione per quanto minuta sulle condizioni iniziali porta rapidamente ad una grande incertezza sul futuro del sistema (*sensibilità alle condizioni iniziali*), e ciò fa sì che anche i sistemi la cui evoluzione è descritta da leggi deterministiche siano imprevedibili, da cui il frasario "indeterminismo fisico", "caos deterministico", "determinismo imprevedibile", ecc.. Per i sistemi caotici la "conoscenza dello stato del sistema ad un certo istante", a cui ci si riferiva poco sopra, dovrebbe essere una conoscenza con precisione infinita per consentire la previsione a tempi futuri. L'uomo non ha questa capacità e nemmeno i suoi computer che operano con un numero finito di cifre. Per un sistema dinamico non caotico, da una conoscenza approssimativa (nel senso di "entro gli errori di misura") dello stato presente è deducibile approssimativamente (nel senso che gli errori rimangono piccoli) lo stato futuro del sistema. Per un sistema caotico, per quanto precisa sia la conoscenza dello stato presente, tutto ciò che possiamo asserire con il nostro armamentario deterministico è che in futuro il sistema sarà sì in un punto dell'attrattore, quale che sia però non siamo in grado di prevederlo. Ma come vedremo nelle prossime pagine, l'"armamentario" non si rivelerà certo disarmato nel territorio dell'indeterminismo fisico.

Fin qui si sono riportate in tono piuttosto discorsivo alcune idee basilari sottostanti alla teoria del caos unicamente per fornire una cornice a ciò che seguirà. Esiste una letteratura assai vasta sugli argomenti accennati e nei tempi in cui viviamo sappiamo tutti come soddisfare le nostre curiosità bibliografiche quando qualcosa ci interessa. Ci limitiamo per ora a citare alcuni recenti libri: Tong (1990), Abarbanel (1996), Kantz e Schreiber (1997).

## 2. CARATTERIZZAZIONE DEL CAOS

Lo studio delle traiettorie nello spazio delle fasi si rivela essenziale per discriminare il caos dalla pura aleatorietà trovare delle strutture comuni a tutti i fenomeni caotici, caratterizzare il caos quantitativamente. Si è detto della crescita esponenziale della distanza tra traiettorie inizialmente molto vicine. La grandezza che misura tale tasso di crescita è l'esponente di Lyapunov massimo. Siano  $\mathbf{x}^1(0)$  e  $\mathbf{x}^2(0)$  due punti nello spazio delle fasi distanti  $h = |\mathbf{x}^1(0) - \mathbf{x}^2(0)|$  al tempo 0. Dopo un certo tempo  $t$ , i due punti si troveranno ad una distanza  $|\mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}^2(t)|$ . L'esponente di Lyapunov massimo  $\lambda$  è così definito:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}^2(t)|}{h} \right) \quad (3)$$

Definizione valida con probabilità 1 a meno di insiemi di condizioni iniziali a misura nulla. Un valore positivo di  $\lambda$  indica la sensibilità alle condizioni iniziali, tipico segno distintivo del caos. Un'altra importante grandezza per caratterizzare un sistema caotico è la misura della struttura geometrica dell'attrattore. Esistono varie definizioni di dimensione frattale (si veda, per esempio, Eckmann e Ruelle, 1985), una frequentemente adottata nel contesto dell'analisi di serie storiche caotiche è la "dimensione di correlazione", definita per una serie di  $N$  dati nel limite  $N \rightarrow \infty$  da:

$$D_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln C_2(\rho, N)}{\ln \rho}$$

dove  $C_2$ , integrale di correlazione, è il numero di punti  $\mathbf{x}^i$  nello spazio delle fasi entro una sfera di raggio  $\rho$  ed è stimabile mediante la:

$$C_2 = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\rho - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j|)$$

dove  $\Theta$  è la funzione di Heaviside,  $\Theta(x) = 0$  se  $x \leq 0$  e  $\Theta(x) = 1$  se  $x > 0$ .

Queste (ed altre) quantità osservabili sono particolarmente importanti per la caratterizzazione di un fenomeno non lineare in quanto sono quantità *invarianti*. Con ciò si vuole significare che anche se si effettuano le misurazioni sul sistema con strumenti, modalità differenti e in differenti condizioni iniziali, anche se si modificano certi particolari nella ricostruzione dello spazio delle fasi (di cui accenneremo più sotto), il valore degli "invarianti" non cambia. Tutto ciò nel caso ideale, se la serie fosse infinita e senza errori di misura. Negli esperimenti reali la situazione è ovviamente ben diversa. Primo, lo spazio delle fasi non è di per sé osservabile; secondo, neppure lo stato viene osservato direttamente, ma solo

attraverso la mediazione di una funzione di misura che, tra l'altro, non è detto sia conosciuta; terzo, i valori misurati sono comunque affetti da errore.

Indichiamo con

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)]$$

lo stato del sistema al tempo  $t$  nello spazio delle fasi a  $d$  dimensioni. La serie storica osservata non è altro che una sequenza di scalari  $s(1), s(2), \dots, s(N)$  che rappresentano i valori, misurati ai tempi  $t = 1, 2, \dots, N$ , a distanza  $\Delta t$  l'uno dall'altro, di una qualche grandezza  $s$  funzione dallo stato  $\mathbf{x}$ , cioè:

$$s(t) = s[\mathbf{x}(t)]$$

se  $s(n)$  è il risultato della misurazione di  $s(t)$  al tempo  $t = n$  avremo:

$$s(n) = s[\mathbf{x}(n)] + \varepsilon_n$$

dove  $\varepsilon_n$  rappresenta l'errore di misura.

Supponiamo che le misurazioni  $s(1), s(2), \dots, s(N)$  mostrino un andamento irregolare del tipo esemplificato in figura 1, ossia essenzialmente un andamento non periodico. Solo sulla base dei dati a disposizione vogliamo attribuire il corretto significato ai simboli che entrano nelle equazioni che descrivono l'evoluzione temporale del sistema. Se il tempo è rappresentato da una variabile continua, avremo il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t) = F(\mathbf{x}(t), t) + \eta(t) \quad (4)$$

mentre se il tempo assume valori discreti scriveremo la mappa:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) + \eta_n \quad (5)$$

Il punto cruciale è  $\eta$  che rappresenta l'influenza dell'ambiente sul sistema. Tale componente, detta di rumore dinamico, si differenzia dall'errore di osservazione  $\varepsilon_n$  in quanto interagisce con la non linearità del sistema, spesso producendo fenomeni caratteristici. Ad esempio, un neurone può essere visto come un sistema dinamico non lineare ad alta efficienza pur essendo immerso in alti livelli di rumore. Una simile efficienza sembra derivare anche da una capacità del neurone di sfruttare il rumore per mezzo di una sorta di sincronizzazione di fase (*phase locking*). Questa proprietà, scoperta di recente, è detta risonanza stocastica e permetterebbe di spiegare il comportamento di altri fenomeni, come ad esempio le glaciazioni. Per una trattazione sull'argomento si veda Gammaitoni *et al.* (1998). È ben vero che nella realtà un sistema non è mai perfettamente esente da perturbazioni e quindi è comunque  $\eta \neq 0$ . Più che addentrarsi nell'impresa, dall'improbabile successo, di definire il confine fra determinismo e caso, si tratta

di capire se il nostro fenomeno possa essere considerato *operativamente* deterministico, ovvero se sia più adeguato un modello in cui è lecito trascurare  $\eta$ . Con questa scelta si assume che l'irregolarità del segnale sia generata autonomamente, grazie alla non linearità delle equazioni  $F$  (o  $f$ ), come nell'esempio del pendolo forzato. Le quantità che variano casualmente sono allora solo gli errori di misura  $\varepsilon_n$  che però sono indipendenti dalla dinamica costitutiva della natura del sistema. È interessante notare come il problema dei test per il determinismo sia stato affrontato dagli studiosi di varie discipline partendo da diverse angolazioni: per un approccio basato sulla teoria del caos si veda Theiler *et al.* (1992), Casdagli (1992), Kaplan e Glass (1992), Brock *et al.* (1988), Smith (1997), mentre Yao e Tong (1998) pongono il problema dal punto di vista prettamente statistico della regressione non parametrica. Sempre Tong (1990), ispirandosi alla teoria dei sistemi dinamici ha traghettato l'analisi statistica delle serie storiche sulla sponda della non linearità, inaugurando così un settore di ricerca in continua espansione. In questo contesto, è opportuno ricordare che altra cosa sono i fenomeni deterministici non lineari e caotici ad alta dimensionalità, ancora più difficili da inquadrare e per i quali lo studio della dinamica nello spazio delle fasi risulta spesso impraticabile. Uno degli obiettivi principali, in tale ambito, risulta la riduzione dei gradi di libertà del sistema, in modo da permetterne l'analisi. Non ci addenteremo nell'argomento, ci basti sottolineare che un processo stocastico prodotto da un calcolatore è in realtà un processo deterministico non lineare ad alta dimensionalità.

Supponiamo allora che la scelta sia caduta su un modello deterministico e che quindi l'attenzione debba rivolgersi verso lo spazio delle fasi. Lo spazio delle fasi, però, non solo non è osservabile direttamente, ma non è neppure in genere ricostruibile sulla base dei dati a disposizioni, in quanto le misurazioni non tengono conto di tutte le componenti del sistema. Per fortuna, tuttavia, è possibile costruire uno spazio delle fasi equivalente a quello "vero" solo grazie alle informazioni contenute nel segnale registrato. Con "equivalente" si intende che l'attrattore nello spazio delle fasi ricostruito conserva tutte le importanti proprietà, come il valore delle grandezze invarianti, di cui gode nello spazio delle fasi vero. L'idea di base consiste nel fare delle copie del segnale con ritardi temporali fissi e considerare questi valori ritardati come coordinate di uno spazio delle fasi recuperato dai dati. Questa tecnica, nota come *time delay embedding*, associa a ciascuna misura  $s(n)$  il vettore  $m$ -dimensionale

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), \dots, s(n + (m - 1)\tau)]$$

dove  $\tau$  è il ritardo temporale e  $m$  la dimensione dello spazio delle fasi ricostruito o dimensione di *embedding*. I vettori  $\mathbf{y}(n)$  rappresentano l'evoluzione temporale  $\mathbf{y}(n) \rightarrow \mathbf{y}(n+1)$  del sistema in questo nuovo spazio. Questa tecnica riposa su una serie di teoremi (Mañé, 1981, Takens, 1981, Eckmann e Ruelle, 1985, Casdagli *et al.*, 1991) che assicurano l'equivalenza, nel senso sopra specificato, tra la traiettoria originale e quella ricostruita sulla quale, quindi, si può effettuare l'analisi della



dinamica del processo. I teoremi però non forniscono scelte automatiche di  $\tau$  e  $m$ . Per ciò che riguarda  $m$ , per esempio, i teoremi di ricostruzione affermano che condizione sufficiente perché la ricostruzione sia fedele è  $m > 2d_a + 1$ , dove  $d_a$  è la dimensione frattale dell'attrattore. Qualsiasi valore di  $m$  che soddisfi tale disuguaglianza in teoria andrebbe bene, ma in pratica ciò non è vero. Un valore troppo elevato di  $m$  può essere causa di un malfunzionamento degli algoritmi di analisi, per esempio di quelli per la stima degli esponenti di Lyapunov. Si cerca piuttosto il valore ottimale di  $m$ , legato agli effettivi gradi di libertà del sistema, esaminando le caratteristiche *locali* dell'attrattore. Il metodo dei falsi vicini è una delle tecniche più usate in questo senso (Abarbanel, 1996).

Circa la scelta di  $\tau$ , in via di principio, ogni valore è consentito, sempre che si disponga di un numero infinito di misurazioni, infinitamente precise. Nella realtà si segue la prescrizione di calibrare  $\tau$  in modo che non sia né troppo piccolo né troppo grande. Se  $\tau$  è troppo piccolo, la misura  $s(n+\tau)$  non aggiunge alcuna informazione alla misura  $s(n)$ ; se è troppo grande  $s(n)$  e  $s(n+\tau)$  sono praticamente misure eseguite a caso l'una rispetto all'altra. Per la scelta di  $\tau$  sono stati suggeriti criteri che si basano sul primo zero della funzione di autocorrelazione dei dati o sul primo minimo locale della mutua informazione. Non entrerebbe ulteriormente nei vari aspetti del problema (si veda, per esempio, Abarbanel, 1996), ci limitiamo qui ad accennare che esistono altri metodi di ricostruzione e a ricordare che, qualunque sia il metodo scelto, in pratica occorre competenza, esperienza, intuizione e altro ancora per conseguire una ricostruzione soddisfacente.

### 3. STIMA E ACCURATEZZA DELLA STIMA DEGLI ESPONENTI DI LYAPUNOV

Supponiamo di avere stimato il massimo esponente di Lyapunov di un certo sistema dinamico (vedremo come più avanti) pari a 0.033. Possiamo ritenere di essere probabilmente in presenza di un sistema caotico e proseguire le indagini in questa direzione? Dipende. Dipende semplicemente dall'accuratezza della stima. Se l'errore standard fosse, per esempio, 0.1, sarebbe arduo confidare sulla caoticità del sistema. Solo conoscendo le equazioni del moto (4) o (5), e anche in tal caso molto raramente in regime caotico, è possibile determinare gli esponenti di Lyapunov analiticamente. Si comprende pertanto la necessità di una analisi statistica rigorosa riguardo al problema della stima degli invarianti. Come si è detto, è la conoscenza di queste quantità che ci permette di individuare la dinamica sottostante ai fenomeni in studio, l'accuratezza della loro stima è quindi una richiesta minimale.

Limitiamo il tema agli esponenti di Lyapunov. I metodi di stima di tali invarianti si dividono in due classi. Alla prima classe appartengono quei metodi che utilizzano la stima della matrice jacobiana per risalire alla divergenza esponenziale delle traiettorie che partono da punti vicini dell'attrattore, mentre della seconda fanno parte procedimenti che misurano direttamente tale divergenza. Dei primi daremo solo alcune indicazioni, per i secondi entrerebbe in maggior dettaglio.

Consideriamo per semplicità la mappa (5), senza rumore,  $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$ . Sia  $\delta\mathbf{x}_n$  una piccola perturbazione sull'orbita al passo  $n$ , sia cioè il sistema al tempo  $n\Delta t$  nello stato  $\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n$ . Al passo  $n+1$ , sviluppando in serie di Taylor, avremo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} + \delta\mathbf{x}_{n+1} &= f(\mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n) \\ &\approx \mathbf{D}f(\mathbf{x}_n) \cdot \delta\mathbf{x}_n + f(\mathbf{x}_n)\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_n) = \mathbf{J}$  è la matrice jacobiana ( $d \times d$ ) ( $d$  è la dimensione dello spazio delle fasi) calcolata lungo i punti  $\mathbf{x}_n$  dell'orbita. La perturbazione  $\delta\mathbf{x}_n$  purché si mantenga sufficientemente "piccola", evolverà secondo l'equazione:

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_n) \times \delta\mathbf{x}_n$$

Se  $\mathbf{u}_i$  è un autovettore di  $\mathbf{J}$  e  $\Lambda_i$  il suo autovalore ( $i = 1, \dots, d$ ), possiamo esprimere  $\delta\mathbf{x}_n$  come  $\sum_{i=1}^d \mathbf{u}_i \alpha_i \Lambda_i$  dove  $\alpha_i$  è il coefficiente di  $\Lambda_i$ . Questo ragionamento va esteso a tutto l'attrattore, se vogliamo dare un numero che caratterizzi l'intero sistema. Studiamo allora l'evoluzione di  $\delta\mathbf{x}_n$  fino al passo  $n+k$ :

$$\delta\mathbf{x}_{n+k} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_{n+k-1}) \times \mathbf{D}f(\mathbf{x}_{n+k-2}) \times \dots \times \mathbf{D}f(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{x}_n = \mathbf{D}f^k(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{x}_n$$

dove  $\mathbf{D}f^k(\mathbf{x}_n)$  è il prodotto della matrice jacobiana lungo la traiettoria. Consideriamo la matrice (detta di Oseledec):

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}, k) = \left[ \left( \mathbf{D}f^k(\mathbf{x}_n) \right)^T \cdot \left( \mathbf{D}f^k(\mathbf{x}_n) \right) \right]^{1/2k}$$

dove  $T$  indica l'operatore di trasposizione. Esiste un teorema dovuto a Oseledec (1968) che assicura l'esistenza del limite  $\mathbf{O}(\mathbf{x})$  di  $\mathbf{O}(\mathbf{x}, k)$  per  $k$  che tende all'infinito e che tale limite non dipende da  $\mathbf{x}$  per quasi tutti i vettori  $\mathbf{x}$  appartenenti al bacino di attrazione. I logaritmi dei  $d$  autovalori di  $\mathbf{O}(\mathbf{x})$  sono proprio gli esponenti di Lyapunov *globali* del sistema. Se gli autovalori sono calcolati per la matrice  $\mathbf{O}(\mathbf{x}, k)$  questi sono gli esponenti di Lyapunov *locali*, che misurano con che rapidità una perturbazione nel punto  $\mathbf{x}$  della traiettoria si propaga in un numero finito di  $k$  passi.

Ci sembra importante sottolineare che la teoria degli esponenti di Lyapunov si basa esclusivamente su quello che avevamo chiamato "armamentario deterministico". La struttura matematica della meccanica *razionale*, quella meccanica che si sviluppa per deduzione *logica* da principi, si estende nella provincia dei fenomeni caotici dove, delucidando i propri limiti, è in grado di rendere conto e misura dell'impredicibilità. È ancora il *logos* che spiega e quantifica il *clinamen*.

Gli algoritmi per il calcolo degli esponenti di Lyapunov non sono banali, anche quando si eseguono simulazioni e, quindi, si conoscono le equazioni del moto

(Benettin *et al.*, 1980). Nel caso poi che si disponga solo di una serie scalare di dati, occorre operare nello spazio ricostruito. Senza entrare nella descrizione degli algoritmi, limitiamoci ad alcune osservazioni. L'attrattore ricostruito contiene una sola traiettoria, possiamo tuttavia riguardare due punti vicini nello spazio delle fasi ricostruito, ma non temporalmente vicini, come appartenenti a traiettorie differenti. Se  $m$  è la dimensione di *embedding* ed è  $m > d$ , otteniamo più esponenti di quanti siano realmente legati alla dimensione dell'attrattore. Questi esponenti sono detti "spuri" e non aggiungono alcuna informazione alla dinamica del sistema. Per gli algoritmi, si vedano, tra le altre, le proposte di Eckmann *et al.* (1986), Sano e Sawada (1985), Brown *et al.* (1991), McCaffrey *et al.* (1992), Nychka *et al.* (1992). In questi ultimi due lavori, la stima degli esponenti è vista come un problema squisitamente statistico, in quanto la stima della matrice jacobiana è effettuata mediante una regressione non parametrica. Whang and Linton (1999) derivano la distribuzione asintotica di tali stime non parametriche, sfruttando la teoria della regressione kernel. In certe situazioni sembrano preferibili gli esponenti di Lyapunov locali, per i quali sono stati ricavati alcuni risultati asintotici (Wolff 1992, Lu e Smith 1997) e un teorema centrale del limite (Bailey 1997). Le applicazioni di questo teorema però soffrono di alcune limitazioni (Theiler e Smith, 1995). Notiamo che con questo tipo di algoritmi risulta necessario lavorare con una mole abbastanza cospicua di dati perché i risultati asintotici siano validi.

Si è detto che esiste un'altra strada per stimare gli esponenti di Lyapunov, meglio: l'esponente di Lyapunov massimo  $\lambda$  come definito nella (3). Essa consiste nella stima diretta nello spazio delle fasi della crescita esponenziale di traiettorie che partono da punti vicini (non temporalmente). Questi metodi sono stati sviluppati da Wolf *et al.* (1985), Rosenstein *et al.* (1993), Kantz (1994). Un algoritmo di questo tipo è descritto in dettaglio in Kantz e Schreiber (1997) e fa parte del pacchetto TISEAN disponibile gratuitamente (Hegger *et al.*, 1999). La sua struttura è così riassumibile. Dopo avere eseguito l'*embedding* della serie osservata, per ogni punto della traiettoria ricostruita il programma procede nelle seguenti modalità (usiamo la stessa simbologia di Kantz e Schreiber 1997). (1) individua  $n_{fmin}$  punti vicini al punto scelto a meno di un certo raggio e distanti temporalmente più di un certo  $n_{min}$ ; (2) fa evolvere questi punti di  $i_{fu}$  passi, misurando ad ogni passo la distanza media tra il punto originale e i suoi  $n_{fmin}$  vicini; (3) calcola il logaritmo di queste distanze; (4) calcola la media su tutto l'attrattore, cioè la funzione  $S(k)$ ,  $k = 0, \dots, i_{fu}$ , che graficata in funzione di  $k$ , esibisce un andamento lineare nella parte in cui esiste (se esiste) una divergenza esponenziale. La pendenza di questa parte lineare costituisce una stima dell'esponente di Lyapunov massimo. In pratica, non occorre considerare tutti i punti della traiettoria, ma solo un certo numero  $n_{cmin}$ . Il ruolo dei vari parametri introdotti lo abbiamo discusso in Giannerini e Rosa (2001b), dove sono anche riportate le nostre modifiche all'algoritmo sopra descritto che, completo della parte dedicata alla stima dell'accuratezza di cui diremo nella prossima sezione, è stato da noi ribattezzato LEA (*Lyapunov Exponent Accuracy*).

In figura 3 è mostrato, come esempio, l'andamento di  $S(k)$ . Individuando la parte lineare nell'intervallo  $12.5 \leq k \leq 21$ , la stima di  $\lambda$  risulta pari a 0.072. Il sistema simulato è quello ben noto di Rössler, introdotto dall'autore nei suoi studi di cinetica chimica (Rössler, 1976), governato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -(y+z) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= x+ay \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= b+z(x-c) \end{aligned} \quad (6)$$

dove  $a = 0.15$ ,  $b = 0.20$ ,  $c = 10.0$  e integrate con  $\Delta t = 0.1$ . La serie è "pulita", nel senso che non vi è rumore, a meno della precisione del computer. L'*embedding* è stato eseguito su una serie, ottenuta dalla componente  $x$  delle precedenti equazioni (6), di lunghezza  $N$  uguale a 6500 e con  $m = 3$ ,  $\tau = 8$ ; inoltre  $n_{cmin} = 6000$  e  $n_{fmin} = 5$ . Ritorneremo su questo sistema nella sezione seguente.

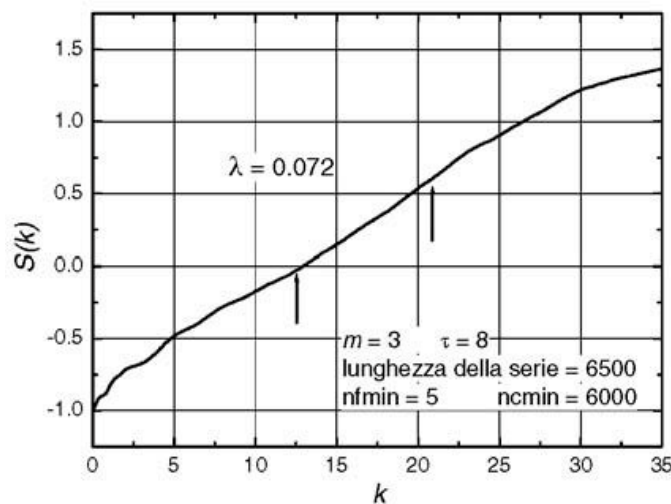


Figura 3 – Media del logaritmo della divergenza delle traiettorie  $S(k)$  in funzione del tempo calcolata sull'attrattore di Rössler. Le frecce individuano la parte lineare della curva, la cui pendenza fornisce la stima dell'esponente di Lyapunov massimo  $\lambda = 0.072$ . I parametri usati sono riportati in figura.

Questa classe di metodi per stimare il massimo esponente di Lyapunov, tra gli altri pregi, ha anche quello di poter trattare serie relativamente brevi, ha però il difetto di non fornire analiticamente la varianza (asintotica) delle stime. In casi simili, mancanza cioè di risultati analitici, è buona norma sfruttare le tecniche di ricampionamento. È noto che grazie ai metodi di bootstrap si possono costruire le distribuzioni empiriche degli stimatori solo sulla base dei dati a disposizione, senza alcuna ipotesi sulle distribuzioni di probabilità sottostanti. Per serie stazionarie con dati dipendenti, è stato proposto il moving block bootstrap. Brevemente, la serie viene divisa in blocchi sovrapponibili di lunghezza sufficiente ad assicurare l'indipendenza tra blocco e blocco; i blocchi sono poi ricampionanti per dare

origine a nuove serie di lunghezza pari a quella di partenza. Il lettore di questa rivista può consultare Mignani (1995), Mignani e Rosa (1996) per maggiori ragguagli su questa tecnica. Sfortunatamente il moving block bootstrap non funziona con serie deterministiche, in quanto la dinamica originale, pur conservandosi entro il singolo blocco, viene distrutta da una componente stocastica che si inserisce tra blocco e blocco (Giannerini, 1998). Alcuni hanno tentato di applicare sia il bootstrap classico (Gençay, 1996) sia il moving block bootstrap (Bask e Gençay, 1998) nello spazio delle fasi. Vengono così a crearsi spazi delle fasi in cui si hanno punti sovrapposti, il che è piuttosto bislacco dal punto di vista dell'interpretazione fisica (Giannerini e Rosa, 2001a). Le stesse proposte si sono dimostrate insostenibili anche teoricamente (Ziehmman *et al.*, 1999). Accenniamo infine ad un metodo che si basa sulla previsione suggerito da Golia e Sandri (1997). Questi autori ottengono nuove traiettorie nello spazio delle fasi i cui punti sono "previsioni" ricavate sulla base dei dati originali. Tuttavia, i metodi basati sulla previsione soffrono di notevoli svantaggi, per esempio sorgono problemi quando nella serie è presente una componente stocastica rilevante, inoltre necessitano di un notevole apparato numerico.

Anche la nostra proposta è nello spirito del bootstrap, in quanto si sfruttano solo i dati a disposizione e da questi si costruiscono nuove serie. L'idea consiste essenzialmente nell'interpolare tra i dati della serie osservata, in modo di ottenere nuove serie di maggior lunghezza. A ciascuna di queste nuove serie si applica il programma LEA per stimare  $\lambda$ , ottenendo in tal modo la sua distribuzione. Intuitivamente, le serie interpolate vanno riguardate come serie di misure dello stesso processo eseguite a tempi ed intervalli temporali diversi.

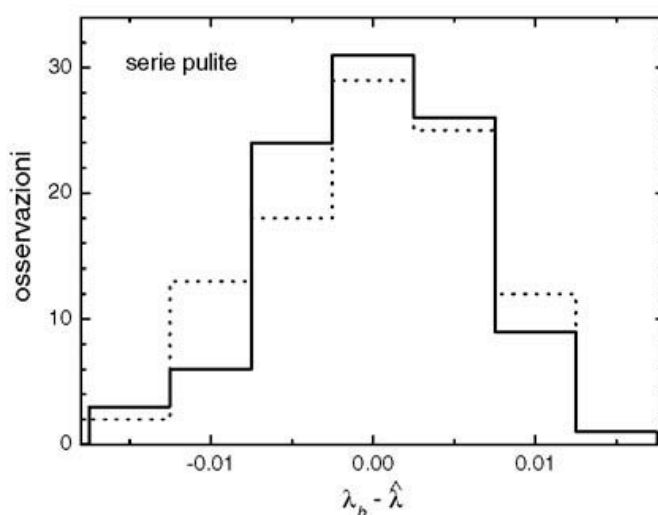


Figura 4 – Distribuzione dell'esponente di Lyapunov massimo dell'attrattore di Rössler ottenuto con 100 serie vere di differenti condizioni iniziali (linea continua) e ricampionando 100 volte un'unica serie (linea a tratto). I parametri usati sono gli stessi riportati in Fig. 3.

## 4. ESPERIMENTI

Per valutare un nuovo metodo di bootstrap e assicurarsi sulla validità del risultato, è necessario confrontare, in qualche modo, la distribuzione dello stimatore ottenuta con il ricampionamento con quella “vera” che nella realtà ovviamente non si conosce. La simulazione serve anche a questo scopo. Consideriamo ancora la serie prodotta dal sistema di equazioni (6). Riguardiamo i valori assunti dalla componente  $x$ , risultanti dall’integrazione, come misurazioni ai tempi  $n \Delta t$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), senza tener conto per ora degli errori di misura. Abbiamo pertanto la serie osservata (scritta in modo da evidenziare  $\Delta t$ ):  $s = s_{1 \cdot \Delta t}, s_{2 \cdot \Delta t}, \dots, s_{N \cdot \Delta t}$  ( $N = 6500$ ). Per questa serie stimiamo  $\lambda$  con la procedura discussa precedentemente, con  $\text{ncmin} = 6000$  e  $\text{nfmin} = 5$ . La stessa stima,  $\lambda_b^v$ ,  $b = 1, \dots, B$  ( $v$  sta per “vero”), è effettuata su  $B$  serie differenti ottenute cambiando le condizioni iniziali, pervenendo in tal modo alla distribuzione “vera” del massimo esponente di Lyapunov.

In figura 4, linea continua, è riportata la distribuzione di  $\lambda_b^v - \hat{\lambda}^v$ , dove  $\hat{\lambda}^v$  è la media della distribuzione vera. Con  $B = 100$  serie, risulta  $\hat{\lambda}^v = 0.072$  e  $\sigma^v = 0.006$ , dove  $\sigma^v$  è l’errore standard. È importante chiarire che la variabilità della stima in questo caso è dovuta semplicemente al fatto che operiamo su diverse traiettorie finite e che l’algoritmo in ciascuna traiettoria considera solo  $\text{ncmin}$  punti. Considerando tutti i punti e aumentando  $N$  la variabilità decresce, tendendo a 0 per  $N \rightarrow \infty$ . Sulla base delle simulazioni, quindi, lo stimatore appare essere consistente.

Applichiamo ora il nostro metodo di bootstrap. Data la serie osservata  $s$ , procediamo secondo i passi seguenti: (1) si divide  $\Delta t$  per un fattore  $\zeta$ , ottenendo un nuovo intervallo  $\delta t = \Delta t / \zeta$ ; (2) si sceglie a caso un punto  $p_1$  in  $[0, \Delta t]$ ; (3) si costruisce una nuova serie interpolando i valori ( $r$  sta per “replicato”)  $s_{1 \cdot \delta t}^r, s_{2 \cdot \delta t}^r, \dots, s_{q \cdot \delta t}^r$ , nei punti  $p_1, p_2 = p_1 + \delta t, \dots, p_q = p_{q-1} + \delta t$ , dove  $q$  è l’ultimo punto minore di  $N \times \zeta$ ; (4) i passi 2 e 3 sono ripetuti  $B$  volte; (5) si generano  $B$  serie ricampionate  $s^r_1, s^r_2, \dots, s^r_B$ , per ciascuna di esse si stima il massimo esponente di Lyapunov  $\lambda_b^r$  ( $b = 1, \dots, B$ ), ottenendo infine la sua distribuzione. Seguendo un suggerimento di Kantz e Schreiber (1997), l’interpolazione è effettuata a mezzo di funzioni spline, per evitare possibili riduzioni dell’ampiezza del segnale.

In figura 4, linea a tratto, è mostrata la distribuzione  $\lambda_b^r - \hat{\lambda}^r$ , ottenuta ricampionando  $B = 100$  volte una singola serie lunga  $N = 6500$ , con i precedenti valori di  $\text{ncmin}$  e  $\text{nfmin}$  e dividendo l’intervallo  $\Delta t$  per  $\zeta = 4$ . La stima del massimo esponente di Lyapunov su questa singola serie, che chiameremo  $\lambda^o$ , ( $o$  sta per “osservato”), risulta pari a 0.073. È manifesto l’accordo tra le due distribuzioni, vera e di bootstrap, in particolare l’errore standard  $\sigma^r$  della distribuzione di bootstrap è ancora uguale a 0.006.

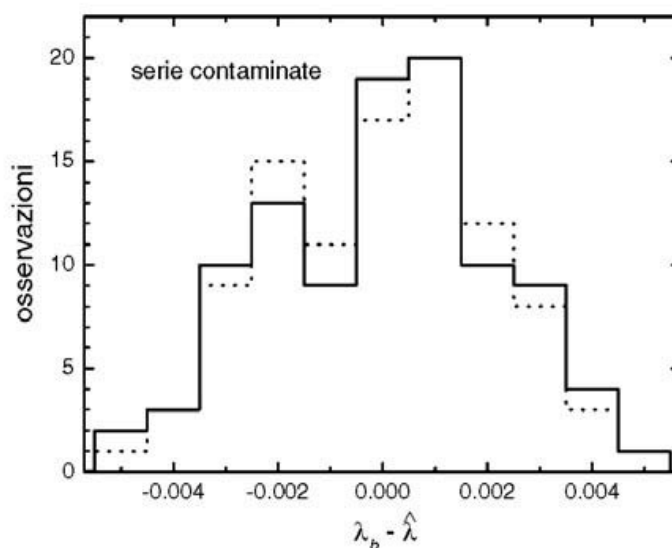


Figura 5 – Come in Fig. 4, ma con serie contaminate. Rapporto segnale/rumore = 100.

La simulazione permette anche di eseguire esperimenti con serie “contaminate”, per assicurarsi che il metodo di ricampionamento da noi proposto funzioni anche in presenza di errori di misura, inevitabili in esperimenti reali. A ciascuna osservazione  $s_{i,\Delta t}$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) è stato aggiunto un “rumore”  $\varepsilon_i$ . Per avvicinarsi alla situazione reale, in cui non sempre il meccanismo che genera il rumore è modellabile con una singola distribuzione, si sceglie a caso ad ogni passo o la distribuzione uniforme nell’intervallo  $[0,1]$  o quella normale. Quindi  $\varepsilon_i$  rappresenta una realizzazione o dell’una o dell’altra distribuzione e, per simulare il rapporto segnale/rumore desiderato, viene moltiplicato per un opportuno fattore. Una volta realizzata la serie contaminata, per produrre le repliche si procede con l’interpolazione nei modi descritti per le serie pulite.

La figura 5, analogamente alla figura 4, mostra il confronto per la distribuzione vera e di bootstrap per serie contaminate con SNR (*signal-to-noise-ratio*) = 100. Con gli stessi parametri di Fig. 4, per le serie vere risulta  $\hat{\lambda}^v = 0.031$  e  $\sigma^v = 0.002$ . Per la serie “osservata”, da cui abbiamo generato le repliche, si ha  $\lambda^o = 0.033$ , quel valore che avevamo scelto come esempio all’inizio della sezione 3, e  $\sigma^r = 0.002$ , ancora in accordo con  $\sigma^v$ . Ora abbiamo assegnato un’accuratezza alla stima e, se nulla sapessimo della natura del sistema studiato, il risultato finale  $\lambda^o = 0.033 \pm 0.002$  ci indurrebbe a ritenere di essere in presenza di un sistema caotico e proseguire la ricerca in tale direzione.

Esperimenti sistematici (Giannerini e Rosa, 2001b) hanno evidenziato alcuni importanti risultati. Variazioni ragionevoli del valore di  $n_{fmin}$ , di  $n_{min}$  e degli estremi dell’intervallo per la scelta del tratto lineare di  $S(k)$  producono fluttuazioni

sulla stima di  $\lambda^o$  molto minori di  $\sigma^r$ . Le stesse variazioni influiscono su  $\sigma^r$  di un qualche percento. Il rapporto  $(\lambda_b^r - \hat{\lambda}) / \sigma^r$  è generalmente molto piccolo, rimanendo comunque entro 0.20 - 0.30, considerato accettabile (Efron e Tibshirani, 1993, p. 128).

Ci si può legittimamente chiedere come mai le serie ricampionate, e quindi provenienti tutte da un'unica serie, mostrano essere indipendenti tra loro, come se fossero serie che partono da condizioni iniziali diverse. Alcuni esperimenti possono gettare luce su questa importante questione che come vedremo è legata alla scelta del fattore  $\zeta$  per cui viene diviso l'intervallo  $\Delta t$ .

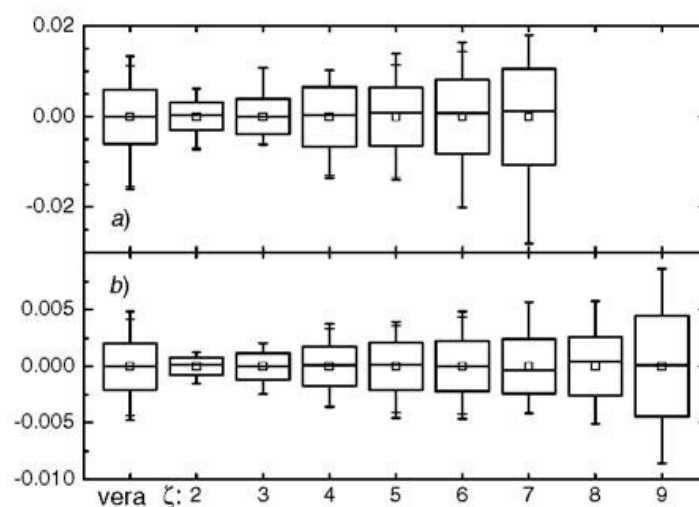


Figura 6 – Andamento della distribuzione dell'esponente di Lyapunov massimo dell'attrattore di Rössler ottenuto ricampionando 100 volte un'unica serie pulita (a) e contaminata (b) in funzione del fattore  $\zeta$ , per cui è diviso l'intervallo di misura originale. I parametri sono gli stessi di figura 3. L'altezza della scatola è pari a 2 volte l'errore standard e i "baffi" indicano il minimo e il massimo della distribuzione. La distribuzione delle serie vere è mostrata per confronto.

Abbiamo ripetuto il ricampionamento sopra descritto per vari valori di  $\zeta$  ottenendo i risultati riportati in figura 6. La figura mostra, in forma di boxplot, l'andamento in funzione di  $\zeta$  delle distribuzioni di  $\lambda_b^r - \hat{\lambda}^r$ , per la serie pulita (a) e contaminata (b) e, per confronto, la distribuzione di  $\lambda_b^v - \hat{\lambda}^v$ . Si è scelto l'altezza della scatola pari a due volte l'errore standard. Dalla Fig. 6a, appare come  $\sigma^r$  parta da 0.003, raggiunga un intervallo dove si stabilizza intorno a 0.006 e poi cresca di nuovo. In questo intervallo, che calcoli più dettagliati indicano estendersi da  $\zeta = 3.5$  fino a  $\zeta = 5.5$ , le variazioni di  $\sigma^r$  per differenti  $\zeta$  sono confrontabili con le fluttuazioni dovute a piccoli cambiamenti dei parametri dell'algoritmo per la stima di  $\hat{\lambda}^r$ , di cui abbiamo accennato in precedenza. Il risultato essenziale è che l'errore standard  $\sigma^r$  stimato sulle serie replicate si stabilizza su valori significa-



tivamente uguali all'errore standard  $\sigma^v$  stimato sulle corrispondenti serie vere. Il medesimo andamento è riscontrabile anche per la serie contaminata (figura 6b), per la quale l'intervallo di stabilità è più ampio.

Esperimenti eseguiti su altri attrattori e con diversi livelli di rumore convergono alle stesse conclusioni (Giannerini e Rosa, 2001b). All'aumentare di  $\zeta$  compare un intervallo dove  $\sigma^r$  si mantiene pressoché stabile e dove il suo valore è in accordo statistico con  $\sigma^v$ , come confermato da test parametrici e non parametrici per l'uguaglianza della varianza delle distribuzioni. Inoltre, quanto più il livello di rumore è alto (ovviamente nei limiti in cui hanno ancora senso le operazioni di *embedding*) tanto più l'intervallo è esteso. I risultati sembrano quindi indicare che per certi valori di  $\zeta$  le serie interpolate possono essere considerate indipendenti tra loro, come fossero serie vere con differenti condizioni iniziali.

## 5. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

È quasi inutile avvertire come resti ancora lavoro da fare: teorico, di simulazione e su serie reali. Molti, possibili raffinamenti ed estensioni del metodo rimangono in fase propositiva. Ci sembra comunque che, da questi primi risultati, soluzioni basate sull'interpolazione aprano una via all'applicazione di tecniche di bootstrap a serie deterministiche, anche se ciò suona quasi un ossimoro. Non è sufficiente però nello studio di un sistema stabilire se il massimo esponente di Lyapunov è probabilmente positivo o se la dimensione dell'attrattore ricostruito è frattale. Certo, può essere il primo passo, uno stimolo a imboccare una strada piuttosto che un'altra. Ma è dar prova di insipida e pigra ricerca accontentarsi di registrare un valor medio, un errore standard, un livello di fiducia, e basta. Successivamente, infatti, occorre creare modelli del sistema e per questo sono necessarie conoscenze economiche, fisiche, biologiche, ecc., che dipendono dalla disciplina entro la quale il sistema viene considerato. Per questo suo carattere interdisciplinare la teoria del caos richiede ai ricercatori unione di intenti e linguaggio comune. In particolare, la statistica pare destinata ad avere un ruolo sempre più rilevante nello studio dei fenomeni non lineari, alla stessa stregua del posto che occupa ora per quelli lineari. Non dovrebbe stupire allora leggere un articolo sulla stima degli esponenti di Lyapunov sul *JASA* (McCaffrey *et al.*, 1991), sulla loro distribuzione asintotica sul *Journal of Econometrics* (Whang e Linton, 1999) e, ancora, trovare un test per il determinismo che sfrutta il ricampionamento dei residui nella scelta del parametro di *bandwidth* nella regressione kernel su una rivista di fisica come *Physica D* (Yao e Tong, 1998).

Esiste un'imponente bibliografia sui sistemi caotici. Alcuni dei lavori qui citati possono costituire un punto di partenza per una navigazione telematica, e non, che approdi a siti in grado di appagare l'interesse dell'esploratore. Se poi qualcuno volesse intraprendere una navigazione essenzialmente concettuale su rotte percorrenti temi evocativi, ricchi di riflessioni filosofiche, non solo vertenti sul caos deterministico, ma che dipanano l'intreccio di determinismo e indeterminismo, di

causalità e caso, allora ci sentiamo di suggerire quale porto di partenza e di approdo un aureo scritto di Italo Scardovi *Il tempo e il caso* (Martello Libreria, 1999). Siamo certi della felice riuscita del viaggio.

*Dipartimento di Scienze statistiche "Paolo Fortunati"*  
*Università di Bologna*

SIMONE GIANNERINI

*Dipartimento di Scienze statistiche "Paolo Fortunati"*  
*Università di Bologna*  
*CNR-IMM, Sezione di Bologna*

RODOLFO ROSA

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- H.D.I. ABARBANEL (1996), *Analysis of observed chaotic data*, Springer Verlag, New York.
- B. BAILEY, S. ELLNER, D.W. NYCHKA (1997), *Chaos with confidence: asymptotic and applications of local Lyapunov exponents*, "The Fields Institute Communication Series", Vol. 11, American Mathematical Society, Providence, R.I., pp. 115-133.
- G. BAKER, J. GOLLUB (1996), *Chaotic dynamics, an introduction*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- M. BASK, R. GENÇAY (1998), *Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*, "Physica D", 114, pp. 1-2.
- G. BENETTIN, L. GALGANI, J.-M. STRELCYN (1980), *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them*, "Meccanica", 15, pp. 9-20.
- A.M. BROCK, W.D. DECHERT, J.A. SCHEINKMAN, B. LE BARON (1988), *A test for independence based on correlation dimension*, University of Wisconsin Press, Madison.
- R. BROWN, P. BRYANT, H.D.I. ABARBANEL (1991), *Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series*, "Physical Review A", 43, pp. 2787-2806.
- M. CASDAGLI (1992), *Chaos and deterministic versus stochastic non-linear modelling*, "Journal of the Royal Statistical Society B", 54, pp. 303-328.
- M. CASDAGLI, T. SAUER, J.A. YORKE (1991), *Embedology*, "Journal of Statistical Physics", 65, pp. 335-356.
- S. CHATTERJEE, M.R. YILMAZ (1992), *Chaos, Fractals and Statistics*, "Statistical Science", 7, 49-68.
- J.-P. ECKMANN, D. RUELLE (1985), *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, "Review of modern physics", 57, pp. 617-656.
- J.-P. ECKMANN, S.O. KAMPHORST, D. RUELLE, S. CILIBERTO (1986), *Lyapunov exponents from a time series*, "Physical Review A", 34, pp. 4971-4979.
- B. EFRON, R. J. TIBSHIRANI (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, New York.
- L. GAMMAITONI, P. HÄNGGI, P. JUNG, F. MARCHESONI (1998), *Stochastic resonance*, "Reviews of Modern Physics", 70, pp. 223-287.
- R. GENÇAY, (1996), *A statistical framework for testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*, "Physica D", 89, pp. 261-266.
- S. GIANNERINI (1998), *Test statistici per fenomeni caotici*, Tesi, Università di Bologna
- S. GIANNERINI, R. ROSA (2001a), *Generating replications of chaotic time series*, "Nonlinear Dynamics Psychology, and Life Sciences", 5, pp. 77-87.

- S. GIANNERINI, R. ROSA (2001b), *New Resampling Method to Assess the Accuracy of the Maximal Lyapunov Exponent Estimation*, "Physica D", 155, pp. 101-111.
- S. GOLIA, M. SANDRI (1997), *Resampling chaotic time series*, "Physical Review Letters", 78, pp. 4197-4200. Nota aggiunta in bozze: degli stessi autori vedi anche *A resampling algorithm for chaotic time series*, "Statistics and Computing", 11, pp. 241-255 (2001).
- R. HEGGER, H. KANTZ, T. SCHREIBER (1999), *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, "CHAOS", 9, pp. 413-435. Il software è disponibile gratuitamente al sito <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean>.
- H. KANTZ (1994), *A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series*, "Physics Letters A", 185, pp. 77-87.
- H. KANTZ, T. SCHREIBER (1997), *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- D. KAPLAN, L. GLASS (1992), *Direct test for determinism in a time series*, "Physical Review Letters", 68, pp. 427-429.
- Z.-Q. LU, R.L. SMITH (1997), *Estimating local Lyapunov exponents*, The Fields Institute Communication Series, Volume 11, "American Mathematical Society", Providence, R.I., pp. 135-151.
- R. MAÑÉ (1981), *On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps*, in D. Rand, L.S. Young (eds.) "Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980", Lectures Notes in Mathematics 898, Springer-Verlag, Berlin, pp. 230-242.
- D.F. MC CAFFREY, S. ELLNER, A.R. GALLANT, D.W. NYCHKA (1992), *Estimating the Lyapunov exponent of a chaotic system with nonparametric regression*, "Journal of the American Statistical Association", 87, pp. 682-695.
- S. MIGNANI (1995), *Alcune considerazioni sul metodo bootstrap per dati dipendenti*, "Statistica", LV, pp. 469-494.
- S. MIGNANI, R. ROSA (1996), *Catene di Markov Monte Carlo nei modelli di Ising*, "Statistica", LVI, pp. 27-46.
- D.W. NYCHKA, S. ELLNER, A.R. GALLANT, D.F. MC CAFFREY (1992), *Finding chaos in noisy systems*, "Journal of the Royal Statistical Society B", 54, pp. 399-426.
- V.L. OSELEDEC (1968), *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, trad. dal russo in "Moscow Mathematical Society", 19, 197.
- W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, S.A. VETTERLING, B. P. FLANNERY (1992), *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*, 2 ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- M.T. ROSENSTEIN, J.J. COLLINS, C.J. DE LUCA (1993), *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, "Physica D", 65, pp. 117-134.
- O.E. RÖSSLER (1976), *An equation for continuous chaos*, "Physics Letters A", 57, pp. 397-398.
- M. SANO, Y. SAWADA (1985), *Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series*, "Physical Review Letters", 55, pp. 1082-1085.
- L.A. SMITH (1997), *Past and present variability of the solar terrestrial system: measurements, data analysis and theoretical models*, in G. Cini Castagnoli, A. Provenzale (eds.) "Rendiconti della scuola internazionale di fisica Enrico Fermi", CXXXIII Corso, Società Italiana di Fisica, Bologna, pp. 177-246.
- F. TAKENS (1981), *Detecting strange attractors in turbulence*, in D. Rand, L.S. Young (eds.) "Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980", Lectures Notes in Mathematics 898, Springer-Verlag, Berlin, pp. 366-381.
- J. THEILER, S. EUBANK, A. LONGTIN, B. GALDRIKIAN, J.D. FARMER (1993), *Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data*, "Physica D", 58, pp. 77-94.
- J. THEILER, L.A. SMITH (1995), *Anomalous convergence of Lyapunov exponents estimates*, "Physical Review E", 51, pp. 3738-3741.

- H. TONG (1990), *Non-linear time series analysis. A dynamical system approach*, Oxford University Press, Oxford.
- Y.J. WHANG, W. LINTON (1999), *The asymptotic distribution of nonparametric estimates of the Lyapunov exponent for stochastic time series*, "Journal of Econometrics", 91, pp. 1-42.
- A. WOLF, J.B. SWIFT, H.L. SWINNEY, J.A. VASTANO (1985), *Determining Lyapunov exponents from a time series*, "Physica D", 16, pp. 285-317.
- R.C.L. WOLFF (1992), *Local Lyapunov exponents: Looking closely at chaos*, "Journal of the Royal Statistical Society B", 54, pp. 353-371.
- Q. YAO, H. TONG (1998), *A bootstrap detection for operational determinism*, "Physica D", 115, pp. 49-55.
- C. ZIEHMANN, L.A. SMITH, J. KURTHS (1999), *The bootstrap and Lyapunov exponents in deterministic chaos*, "Physica D", 126, pp. 49-59.

#### RIASSUNTO

##### *Caos, statistica e metodi di ricampionamento*

Allo statistico sono offerte dalla teoria del caos nuove vie per l'analisi di serie storiche, insieme a concetti e idee che recano un diretto e sostanziale contributo alla statistica. Viceversa, la metodologia statistica ha dimostrato di svolgere un ruolo cruciale per la comprensione dei sistemi caotici. In questa prospettiva si presentano alcune nozioni essenziali per lo studio di dati provenienti da serie storiche caotiche. In particolare l'attenzione è rivolta alla stima e all'accuratezza della stima degli esponenti di Lyapunov. Per quest'ultimo problema, proponiamo un nuovo metodo basato sul ricampionamento nel dominio temporale. Mediante esperimenti al calcolatore, viene mostrato come la distribuzione del massimo esponente di Lyapunov derivata con il metodo suddetto da una singola serie sia in accordo con quella che si ottiene da serie generate con differenti condizioni iniziali.

#### SUMMARY

##### *Chaos, statistics and resampling methods*

Chaos theory offers to the statistician new perspectives for time series analysis as well as concepts and ideas that have a through contribution to statistics. On the other hand, statistical methodology has shown to play a crucial role for the comprehension of nonlinear and chaotic phenomena. From this standpoint we present some essential notions for the analysis of chaotic time series. Particular attention is given to the problem of estimating Lyapunov exponents, together with the derivation of confidence intervals for estimates. For this latter problem we propose a solution based on resampling by means of spline interpolation. We show from simulations that the distribution of the maximal Lyapunov exponent obtained by way of resampling a single series with our method, agrees with the true distribution obtained from series with different initial conditions.