

## VERIFICA EMPIRICA ED ANALISI CRITICA DEL MODELLO MISTURA BIVARIATA

Aride Mazzali

### 1. INTRODUZIONE

Per spiegare la relazione tra la variabilità delle variazioni dei prezzi di un titolo ed il relativo volume degli scambi nei mercati finanziari, gli studiosi di finanza quantitativa fanno spesso riferimento al modello “mistura bivariata”, introdotto da Tauchen and Pitts (1983) e successivamente generalizzato da svariati autori: Lamoureux e Lastrapes (1994), Andersen (1996), Liesenfeld (1998), Watanabe (2000).

Il modello di Tauchen and Pitts perfeziona quello di Clark (1973), considerando il volume come variabile endogena che dipende, congiuntamente alle variazioni dei prezzi, da un'unica variabile latente, identificabile come il flusso giornaliero di informazioni rilevanti che arrivano al mercato e per la quale assume l'indipendenza seriale.

In questo lavoro, facendo riferimento alle versioni più recenti del modello che adottano per il flusso delle informazioni un processo autoregressivo del primo ordine, interpreteremo la mistura bivariata come un sistema dinamico non lineare rappresentato nello spazio degli stati e proporremo l'impiego di tecniche di simulazione, basate sul campionamento di rigetto (Mariano e Tanizaki, 1996), per la stima dei parametri e del processo latente. I risultati ottenuti da un'applicazione ci forniranno lo spunto per un'analisi critica della capacità del modello di rappresentare la realtà empirica. L'articolo è strutturato come segue. Nel paragrafo 2 il modello di riferimento viene presentato e tradotto in un sistema dinamico non lineare; nel 3 sono proposte le tecniche di simulazione per la stima dei parametri e della serie latente. Il paragrafo 4 riporta i risultati dell'applicazione ad una serie finanziaria della borsa italiana e sviluppa alcune critiche sostanziali. Le conclusioni sono nel paragrafo 5.

## 2. IL MODELLO MISTURA BIVARIATA

Il modello mistura bivariata di Tauchen and Pitts descrive un mercato nel quale il numero degli agenti giornalieri è fisso, mentre il numero dei punti di equilibrio raggiunti è casuale in quanto casuale è il numero di elementi di informazione  $I_t$  che arrivano al mercato ogni giorno.

Gli autori assumono che la variazione  $i$ -esima  $dp_{it}$  del prezzo  $P$  rilevata nel giorno  $t$  ed il corrispondente volume  $v_{it}$  siano rappresentati da variabili casuali indipendenti e normalmente distribuite:

$$dp_{it} \sim N(0, \sigma_1^2); \quad v_{it} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Le corrispondenti variabili casuali che descrivono le variazioni dei prezzi ed i volumi giornalieri, rispettivamente  $dp_t$  e  $v_t$ , si ottengono sommando  $dp_{it}$  e  $v_{it}$  per  $i=1, 2, \dots, I_t$ .

Condizionatamente al flusso delle informazioni  $I_t$ , la distribuzione congiunta di  $dp_t|I_t$  e  $v_t|I_t$  è una normale bivariata con vettore media  $[0, \mu_2 I_t]'$  e, a motivo dell'assenza di correlazione seriale, matrice di varianza-covarianza diagonale:  $diag[\sigma_1^2 I_t, \sigma_2^2 I_t]$ . Da ciò segue che, essendo  $I_t$  una variabile casuale, la distribuzione congiunta incondizionata della coppia  $(dp_t, v_t)$  risulta essere una mistura di normali bivariate in cui  $I_t$  gioca il ruolo di variabile di *mixing* (Liesenfeld, 1998).

In pratica, l'ipotesi di normalità si applica appropriatamente alle variazioni logaritmiche dei prezzi  $dp_t = \ln(P_t / P_{t-1})$ , spesso denominati rendimenti, ai volumi detrendizzati  $v_t$  ed allorché il numero di scambi giornalieri è molto elevato, per cui si può invocare la validità del teorema limite centrale (Watanabe, 2000).

Nelle versioni più recenti del modello, poi, viene abbandonata l'ipotesi che il processo di arrivo delle informazioni sia a valori interi e considerata la posizione:  $I_t = e^{\alpha_t}$ , assumendo che la variabile  $\alpha_t$  segua un processo autoregressivo del primo ordine. In termini di distribuzioni di probabilità condizionate, usando la nuova notazione e tenendo sempre presente che  $dp_t|\alpha_t$  e  $v_t|\alpha_t$  sono indipendenti, il modello può essere descritto dalle relazioni:

$$dp_t|\alpha_t \sim N(0, \sigma_1^2 e^{\alpha_t}) \quad (1)$$

$$v_t|\alpha_t \sim N(\mu_2 e^{\alpha_t}, \sigma_2^2 e^{\alpha_t}) \quad (2)$$

$$\alpha_t|\alpha_{t-1} \sim N(\phi\alpha_{t-1}, \gamma^2), \quad (3)$$

Esplicitando, poi, le variabili casuali  $dp_t$  e  $v_t$  come trasformazioni lineari rispettivamente delle variabili normali standardizzate  $\xi_{1t}$  e  $\xi_{2t}$  ed  $\alpha_t$  come un processo autoregressivo di primo ordine (Lamoureux and Lastrapes, 1994), si deducono le equazioni:

$$dp_t = \xi_{1t} \sigma_1 \sqrt{e^{\alpha_t}} \quad (4)$$

$$v_t = \mu_2 e^{\alpha_t} + \xi_{2t} \sigma_2 \sqrt{e^{\alpha_t}} \quad (5)$$

$$\alpha_t = \phi \alpha_{t-1} + \gamma \varepsilon_t \quad (6)$$

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\phi$  e  $\gamma$  sono parametri da stimare, con  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\mu_2$  e  $\gamma$  positivi,  $-1 < \phi < 1$ ;  $\xi_{1t}$ ,  $\xi_{2t}$  e  $\varepsilon_t$  sono variabili casuali normalmente distribuite con media nulla, varianza unitaria, serialmente e reciprocamente incorrelate.

Dalle ipotesi fatte, discendono le seguenti caratteristiche di media e varianza condizionate:

$$E(dp_t | \alpha_t) = 0;$$

$$\text{Var}(dp_t | \alpha_t) = E(dp_t^2 | \alpha_t) = \sigma_1^2 e^{\alpha_t};$$

$$E(v_t | \mu_t) = \mu_2 e^{\alpha_t};$$

$$\text{Var}(v_t | \alpha_t) = \sigma_2^2 e^{\alpha_t};$$

ed incondizionate:

$$E(dp_t) = 0;$$

$$\text{Var}(dp_t) = E(dp_t^2) = \sigma_1^2 E(e^{\alpha_t});$$

$$E(v_t) = \mu_2 E(e^{\alpha_t});$$

$$\text{Var}(v_t) = \mu_2^2 \text{Var}(e^{\alpha_t}) + \sigma_2^2 E(e^{\alpha_t}).$$

Inoltre, dipendendo da parametri positivi, la covarianza tra il quadrato delle variazioni dei prezzi ed il volume risulta essere sempre positiva, purché non sia nulla la varianza di  $e^{\alpha_t}$ :

$$\text{Cov}(dp_t^2, v_t) = \mu_2 \sigma_1^2 \text{Var}(e^{\alpha_t}) > 0$$

Le relazioni scritte sono importanti per diversi motivi. In primo luogo definiscono i legami tra i parametri liberi  $\phi$  e  $\gamma$  e gli altri; in secondo luogo ci dicono che la struttura di correlazione seriale e, di conseguenza, anche la prevedibilità delle serie storiche  $dp_t^2$  e  $v_t$  sono dovute unicamente all'effetto indotto dalla variabile latente di *mixing*; in terzo luogo evidenziano come un incremento del flusso di informazioni da un lato comporti un'amplificazione della varianza condizionata delle variazioni dei prezzi, interpretabile come un aumento della volatilità dei rendimenti, dall'altro modifichi il livello atteso e la variabilità condizionati dei volumi degli scambi. Questi effetti sono ampiamente documentati nella letteratura specifica (Karpoff, 1987; Watanabe, 2000).

Per poter concretamente utilizzare il sistema mistura bivariata, è necessario stimare sia i parametri, sia il processo latente  $\alpha_t$ .

La letteratura recente è ricca di contributi sui temi in esame, in particolare molte proposte sono rivolte alla stima della distribuzione marginale ( $dp_t$ ,  $v_t$ ), indispensabile per poter definire la funzione di verosimiglianza. Infatti, a motivo dell'autocorrelazione della variabile latente, il problema non è banale in quanto sarebbero necessarie integrazioni di ordine pari all'estensione della serie. In tale

contesto sono suggerite tecniche varie che vanno dal metodo generalizzato dei momenti MGM (Richardson e Smith, 1994) a quelli di simulazione con “*importance sampling*” (Liesenfeld, 1998), o con “*Gibbs-sampling*” (Watanabe, 2000). Per quanto riguarda la stima del processo latente, Lamoureux e Lastrapes (1994) impiegano un metodo basato sulla minimizzazione locale di una forma quadratica *ad hoc*.

Nel presente lavoro i problemi di stima sono affrontati con tecniche di filtraggio per sistemi dinamici non lineari in quanto le equazioni (4), (5) e (6) definiscono un tale sistema, la non linearità riguardando la sola equazione di osservazione. Se denotiamo con  $y_t = [dp_t, v_t]'$  il vettore delle osservazioni, con  $\xi_t = [\xi_{1t}, \xi_{2t}]'$  quello dei disturbi stocastici e con  $\theta = [\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2]'$  il vettore dei parametri, l'equazione non lineare di osservazione si può scrivere nella forma simbolica:

$$y_t = h(\alpha_t, \xi_t; \theta) \quad (7)$$

mentre l'equazione di transizione o di evoluzione dello stato è lineare e già nella (6) è espressa nella forma markoviana appropriata.

Facendo riferimento al sistema formato dalle (6) e (7), mostreremo come sia possibile applicare i metodi di Monte Carlo sia per la stima di massima verosimiglianza dei parametri, sia per la stima dello stato  $\alpha_t$ , ( $t=1, 2, \dots, T$ ), il quale, nel contesto sopra descritto, si presenta come un processo non osservabile, assimilabile sotto tutti gli aspetti ad un *segnale*. La stima dello stato corrisponde, pertanto, ad un processo di *estrazione del segnale* che può essere realizzato con metodi di filtraggio non lineare.

### 3. LE STIME DEI PARAMETRI E DEL PROCESSO LATENTE.

Nell'ambito della teoria dei sistemi lineari, i problemi di estrazione del segnale vengono elegantemente risolti ricorrendo al celebre filtro di Kalman. Nel caso lineare - gaussiano il filtro viene solitamente formulato tramite le equazioni ricorsive per le medie e le varianze, tuttavia, può anche essere espresso equivalentemente in termini di densità di probabilità (Anderson and Moore, 1979). Quest'ultima versione si presta ad essere generalizzata anche ai casi di non normalità e di non linearità.

Consideriamo il problema fondamentale della stima dello stato  $\alpha_t$  al tempo  $t$ , data la successione dei vettori delle osservazioni:  $Y_t = \{ \dots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t \}$ . L'algoritmo iterativo, basato sulle densità condizionate di probabilità, discende da relazioni note del calcolo delle probabilità e può essere tradotto in termini di due equazioni, rispettivamente di previsione e di aggiornamento:

$$P(\alpha_t | Y_{t-1}) = \int P(\alpha_t | \alpha_{t-1}) P(\alpha_{t-1} | Y_{t-1}) d\alpha_{t-1} \quad (8)$$

$$P(\alpha_t | Y_t) = (P(y_t | \alpha_t)P(\alpha_t | Y_{t-1})) / \int P(y_t | \alpha_t)P(\alpha_t | Y_{t-1})d\alpha_t \quad (9)$$

ove le funzioni di densità di probabilità  $P(y_t | \alpha_t)$  e  $P(\alpha_t | \alpha_{t-1})$  sono definite usando le equazioni di misurazione (7) e di transizione (6).

D'altra parte, la stima dei parametri incogniti del modello si ottiene massimizzando la funzione di verosimiglianza:

$$P(Y_T) = \prod_{t=1}^T P(y_t | Y_{t-1}) = \prod_{t=1}^T \left( \int P(y_t | \alpha_t)P(\alpha_t | Y_{t-1})d\alpha_t \right) \quad (10)$$

in cui l'argomento della produttoria altro non è che il denominatore della (9).

Il problema cruciale è quello della valutazione degli integrali nelle (8), (9) e (10). Nell'ambito delle tecniche di simulazione sia per la sua semplicità, sia in quanto fornisce stime la cui precisione non si discosta da quelle ottenibili con metodi di integrazione numerica o di simulazione con "importance sampling" (Tanizaki, 1998), qui proponiamo l'algoritmo MA1F (*Monte Carlo Approach Type 1: Filtering*) che sfrutta il campionamento di rigetto (Appendice) per ottenere le osservazioni casuali dalla densità filtrante  $P(\alpha_t | Y_t)$ .

Preliminarmente, tuttavia, è indispensabile rappresentare in modo adeguato le equazioni di interesse. Per la densità filtrante, dalla (9) si deduce:

$$\begin{aligned} P(\alpha_t | Y_t) &\propto P(y_t | \alpha_t)P(\alpha_t | Y_{t-1}) = \int P(y_t | \alpha_t)P(\alpha_t | \alpha_{t-1})P(\alpha_{t-1} | Y_{t-1})d\alpha_{t-1} \\ &\approx (1/n) \sum_{i=1}^n P(y_t | \alpha_t)P(\alpha_t | \alpha_{i|t-1}) \\ &\propto (1/n) \sum_{i=1}^n \varpi(y_t, \alpha_t)P(\alpha_t | \alpha_{i|t-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

ove la funzione  $\varpi(y_t, \alpha_t)$  assume valori compresi tra lo zero e l'unità - estremi inclusi - ed è proporzionale a  $P(y_t | \alpha_t)$ . Nella rappresentazione approssimata (11) sono considerati i risultati di un campione di  $n$  elementi estratto casualmente dalla densità filtrante al tempo  $t-1$  :  $P(\alpha_{t-1} | Y_{t-1})$ , cioè  $\alpha_{i|t-1}$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), inoltre, tenendo conto della (3), l'approssimazione ci mostra che la densità filtrante è un miscuglio di distribuzioni normali che risulta essere dominata dalla densità  $P(\alpha_t | \alpha_{i|t-1})$ . Per poter applicare il campionamento di rigetto, si può adottare  $\varpi(y_t, \alpha_t)$  come funzione di accettazione e considerare campioni casuali generati dalla distribuzione normale  $N(\phi\alpha_{t-1|t-1}, \gamma^2)$ , ovvero dall'equazione di transizione (6), dopo aver scelto casualmente il rumore bianco  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ . Le determinazioni casuali  $\alpha_{i|t-1}$  ottenute, in base all'algoritmo del rigetto potranno essere ritenute determinazioni della densità filtrante solo se il corrispondente valore della funzione di accettazione risulterà superiore al numero casuale  $u$ , estratto, a sua volta, dalla distribuzione uniforme su  $[0,1]$ .

In sintesi, ponendoci per comodità al tempo  $t-1$  e supponendo di disporre di estrazioni casuali indipendenti desunte dalla densità filtrante  $P(\alpha_{t-1} | Y_{t-1})$ , cioè di  $\alpha_{it-1|t-1}$ , il procedimento comporta le seguenti fasi:

*i)* generazione delle proiezioni usando l'equazione di evoluzione dello stato, dopo aver estratto le variabili casuali  $\varepsilon_{it} \sim N(0,1)$  e scelto a caso  $\alpha_{it-1|t-1}$ :

$$\alpha_{it|t-1} = \phi \alpha_{it-1|t-1} + \gamma \varepsilon_{it}$$

*ii)* accettazione di  $\alpha_{it|t-1}$  come stima dello stato  $\alpha_{it|t}$  e cioè come una determinazione campionaria della densità  $P(\alpha_t | Y_t)$  se il valore della funzione  $\varpi(y_t, \alpha_t)$  risulta superiore ad un numero casuale uniformemente distribuito  $u$  su  $[0:1]$ .

Se  $\alpha_{it|t-1}$  non è accettato, si ripetono le fasi *(i)*-*(ii)*

*iii)* si ripete il procedimento *(i)*-*(ii)* per  $i=1 \dots n$ .

La funzione di verosimiglianza (10) è approssimata dall'espressione:

$$P(Y_T) \approx \prod_{t=1}^T \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(y_t | \alpha_{it|t-1}) \right) \quad (12)$$

per cui il suo calcolo iterativo viene integrato nell'algoritmo precedente in modo naturale e consente di individuare i valori dei parametri che la massimizzano.

Avendo a disposizione per ogni valore di  $t$  le  $n$  determinazioni casuali  $\alpha_{it|t}$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) della variabile casuale  $\alpha_t | Y_t$ , corrispondenti alle combinazioni dei parametri massimizzanti la funzione di verosimiglianza, le stime filtrate del processo latente  $\alpha_{t|t}$  potranno essere definite semplicemente dalle medie aritmetiche:

$$\hat{\alpha}_{t|t} = (1/n) \sum_{i=1}^n \alpha_{it|t}; \quad t=1, 2, \dots, T.$$

#### 4 APPLICAZIONE

Abbiamo considerato le serie delle quotazioni alla chiusura  $P_t$  e del numero di contratti giornalieri (volume)  $V_t$  dal 11.06.1998 al 31.05.2000 per complessivi  $T=501$  valori, relativi al titolo azionario *Generali*. Le serie originarie sono state trasformate utilizzando procedimenti suggeriti dalla letteratura specifica (Liesenfeld, 1998) e precisamente, la serie dei prezzi è stata trasformata nella serie delle variazioni  $dp_t$  usando la formula:  $dp_t = 100[\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})]$ , mentre la serie dei volumi è stata depurata dal trend accostando al logaritmo dei volumi un modello di regressione lineare semplice nella variabile tempo  $t$  e trasformando, poi, l'antilogaritmo dei residui in modo tale che la serie aggiustata  $v_t$  avesse le stesse media e varianza della serie originaria  $V_t$ .

Con riferimento alle serie trasformate  $dp_t$  e  $v_t$ , la tabella III presenta le principali caratteristiche statistiche di media, dispersione, simmetria, curtosi e di autocorrelazione, l'ultima essendo sintetizzata nella tabella in esame dalle statistiche di

Ljung-Box LB(20), calcolate sui primi 20 coefficienti di autocorrelazione. La stessa è più diffusamente illustrata nella successiva tabella IV.

Entrambe le serie appaiono significativamente autocorrelate, asimmetriche, ipernormali, tali caratteristiche essendo particolarmente marcate per la serie  $v_t$ .

L'algoritmo del rigetto MAF1 è stato applicato impiegando campioni di dimensione  $n=500$ , i parametri sono stati stimati massimizzando il logaritmo della verosimiglianza (12) facendo variare i parametri stessi su una griglia discreta molto fitta, mentre il segnale  $\alpha_t$  è stato estratto come media della (11). La tabella I riporta i valori stimati per i parametri, per la massima verosimiglianza, nonché, entro parentesi, i valori approssimati degli scarti quadratici medi delle stime. Questi ultimi sono stati ricavati dalla matrice di varianza-covarianza delle stime, ottenuta invertendo la matrice di informazione (Box- Jenkins, 1970).

La distribuzione di frequenze della variabile latente è illustrata nella figura 1, i principali indici statistici sono nella tabella II.

Disponendo delle stime dei parametri e del processo latente  $\alpha_t$ , è possibile invertire le relazioni (4) e (5) e ricavare i residui stimati  $\hat{\xi}_{1t}$ ,  $\hat{\xi}_{2t}$  i quali costituiscono il riferimento primo per l'analisi della validità dell'accostamento.

TABELLA I

*Valori stimati dei parametri e relativi s.q.m. per il modello mistura bivariata.*

Titolo	$\phi$	$\gamma$	$\mu_2$	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	ln(L)
Generali	.66755 (5.85580e-007)	.42259 (5.35280e-007)	3631.60080 (.00082)	2.69434 (6.09613e-007)	149.12075 (9.67562)	-4299.68020 (.70240)

TABELLA II

*Indici descrittivi della distribuzione filtrante  $P(\alpha_t | Y_t)$*

Indici caratteristici	Valori
Media	-.010930
S.q.m.	.598589
Skewness	-.211293
Curtosi-3	.004454
Minimo	-1.866337
Massimo	1.662214

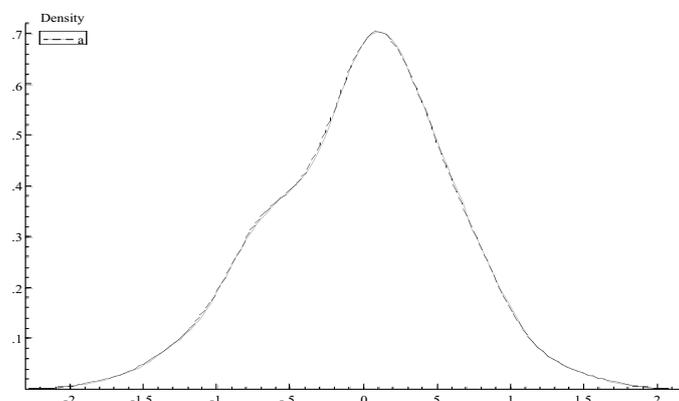


Figura 1 – Funzione di densità filtrante  $P(\alpha_t | Y_t)$

TABELLA III

Valori dei principali indici statistici per le serie  $dp_p$ ,  $v_p$ ,  $\hat{\xi}_{1t}$  e  $\hat{\xi}_{2t}$ .  
Le statistiche del tipo LB e TR2 significative sono sottolineate.

Indici	$dpt$	$vt$	$\hat{\xi}_{1t}$	$\hat{\xi}_{2t}$	$\chi^2_{v,\alpha=0.05}$
Media	.01441	4266.2674	.000424	-.006574	-
S.q.m.	1.7773	2627.5350	.941053	.046640	-
Skewness	.05098	1.8099	.049963	.02744	-
Curtosi-3	.9407	5.4457	.0220	.09154	-
Minimo	-5.8283	561.1221	-3.05268	-.139832	-
Massimo	6.3765	19143.7	2.68821	.144310	-
LB(20)	<u>65.11</u>	<u>439.98</u>	<u>53.25</u>	22.76	$\chi^2_{v=20,\alpha=0.05} = 31.41$
TR2(1)	<u>9.55</u>	<u>71.65</u>	<u>5.18</u>	.48	$\chi^2_{v=1,\alpha=0.05} = 3.84$
TR2(2)	<u>28.06</u>	<u>73.45</u>	<u>23.25</u>	3.59	$\chi^2_{v=2,\alpha=0.05} = 5.99$
TR2(3)	<u>33.56</u>	<u>73.31</u>	<u>31.69</u>	3.71	$\chi^2_{v=3,\alpha=0.05} = 7.82$
TR2(4)	<u>40.19</u>	<u>74.97</u>	<u>37.84</u>	3.98	$\chi^2_{v=4,\alpha=0.05} = 9.49$
TR2(5)	<u>42.76</u>	<u>75.72</u>	<u>50.04</u>	4.26	$\chi^2_{v=5,\alpha=0.05} = 11.07$

A questo scopo, sono state calcolate le funzioni di autocorrelazione, le statistiche di Ljung-Box LB(20) e quelle di eteroschedasticità condizionale di tipo autoregressivo  $TR^2(i)$  per le serie dei residui stimati  $\hat{\xi}_{1t}$ ,  $\hat{\xi}_{2t}$  e ancora le funzioni di correlazione incrociata per le coppie di serie  $(dp_t^2, v_t)$  e  $(\hat{\xi}_{1t}^2, v_t)$ .

Il significato di questi calcoli è il seguente: se il modello interpretasse bene la realtà, le serie  $\hat{\xi}_{1t}$ ,  $\hat{\xi}_{2t}$  dovrebbero risultare serialmente incorrelate, così come l'interdipendenza lineare, evidenziata dalla funzione di correlazione incrociata tra  $dp_t^2$  e  $v_t$ , dovrebbe essere catturata dal modello, per cui le serie  $\hat{\xi}_{1t}^2$  e  $v_t$  non dovrebbero risultare linearmente connesse.

I valori delle statistiche suddette per le serie  $\hat{\xi}_{1t}$ ,  $\hat{\xi}_{2t}$  sono nella tabella III, le funzioni di autocorrelazione nella tabella IV, quelle di correlazione incrociata nella tabella V.

Gli indici riportati evidenziano l'asimmetria dell'azione del modello sulle due serie delle variazioni dei prezzi e dei volumi detrendizzati. Sulla seconda agisce con una certa efficacia riuscendo a ben interpretare la correlazione seriale e l'eteroschedasticità condizionale, come dimostrano le statistiche LB(20) e le  $TR^2(i)$  dei residui  $\hat{\xi}_{2t}$  (tabella III) che, come sappiamo, sotto ipotesi sufficientemente generali, sono distribuite asintoticamente come Chi-quadrato rispettivamente con un numero di gradi di libertà  $v = 20$  e  $v = i$ . Inoltre, la sostanziale non significativa correlazione lineare tra volumi e quadrati dei residui  $\hat{\xi}_{1t}^2$ , che emerge dall'andamento della corrispondente funzione di correlazione incrociata (tabella V), sembrerebbe confortare la tesi di una effettiva capacità del modello di cogliere il nesso tra volatilità dei prezzi - espressa da  $dp_t^2$  - e volumi degli scambi.

Purtroppo, gli elevati valori delle statistiche di Ljung-Box LB(20) e la significativa eteroschedasticità condizionale, segnalata dai  $TR^2(i)$  nei residui  $\hat{\xi}_{1t}$  della

prima serie (tabella III), denunciano drasticamente i limiti del sistema mistura bivariata.

TABELLA IV

Valori delle funzioni di autocorrelazione delle serie  $dp_p$ ,  $v_p$ ,  $\hat{\xi}_{1t}$  e  $\hat{\xi}_{2t}$  per  $k=1,2,.. 20$   
 ( $\pm 2s.q.m. = \pm .089$ )

$k$	Corr( $dp_t, dp_{t-k}$ )	Corr( $v_t, v_{t-k}$ )	Corr( $\hat{\xi}_{1t}, \hat{\xi}_{1t-k}$ )	Corr( $\hat{\xi}_{2t}, \hat{\xi}_{2t-k}$ )
1	<u>.209</u>	<u>.630</u>	<u>.159</u>	-.001
2	-.088	<u>.402</u>	<u>-.114</u>	.038
3	<u>-.192</u>	<u>.271</u>	<u>-.156</u>	.057
4	-.000	<u>.229</u>	-.077	.066
5	.030	<u>.193</u>	.020	.035
6	.058	<u>.169</u>	.050	.028
7	.045	<u>.171</u>	-.000	-.030
8	.027	<u>.112</u>	.004	-.024
9	.044	.088	.028	-.093
10	.039	<u>.118</u>	.055	.036
11	-.022	<u>.137</u>	-.017	-.024
12	-.082	<u>.131</u>	<u>-.097</u>	-.058
13	-.062	.078	-.044	-.087
14	.028	.038	.032	.011
15	.034	.057	.060	-.040
16	-.051	.047	-.029	-.033
17	-.042	.048	-.043	-.004
18	.059	.040	.058	.075
19	.046	.051	.033	.003
20	.053	.040	.079	.033

TABELLA V

Valori delle funzioni di correlazione incrociata  
 tra le coppie di serie  $(dp_t^2, v_t)$  e  $(\hat{\xi}_{1t}^2, v_t)$  per  $k=-10, -9, \dots, 9, 10$  ( $\pm 2s.q.m. = \pm .089$ )

K	$(dp_t^2, vt)$		$(\hat{\xi}_{1t}^2, vt)$	
	Corr ( $dp_t^2, v_{t-k}$ )	Corr ( $dp_t^2, v_{t+k}$ )	Corr ( $\hat{\xi}_{1t}^2, v_{t-k}$ )	Corr ( $\hat{\xi}_{1t}^2, v_{t+k}$ )
0	<u>.547</u>	<u>.547</u>	<u>.149</u>	<u>.149</u>
1	<u>.172</u>	<u>.341</u>	-.007	<u>.092</u>
2	<u>.167</u>	<u>.161</u>	.054	.009
3	<u>.105</u>	.071	.026	-.004
4	<u>.118</u>	.076	.045	-.039
5	.081	.024	.028	-.023
6	.086	.038	.051	-.006
7	<u>.123</u>	.063	<u>.102</u>	.012
8	.050	.033	.023	-.016
9	.073	-.017	.083	-.037
10	<u>.097</u>	-.018	.053	-.031
11	<u>.102</u>	.073	.048	.022
12	.074	.024	.042	-.023
13	.059	.030	.046	.009
14	.090	-.024	<u>.094</u>	-.029
15	.069	.003	.044	-.021
16	-.009	-.025	-.020	-.028
17	.002	-.016	-.018	-.029
18	.021	.018	-.008	-.017
19	.012	-.015	.050	-.001
20	.016	.032	.018	-.010

## 5. CONCLUSIONI

Nel lavoro abbiamo considerato il modello mistura bivariata, originariamente introdotto da Tauchen and Pitts, l'abbiamo rappresentato in termini di un sistema dinamico non lineare nell'equazione di osservazione e, infine, abbiamo stimato i suoi parametri e la variabile latente di mixing usando, nell'ambito del metodo di Monte Carlo, l'algoritmo di rigetto. I risultati ottenuti non possono essere considerati soddisfacenti in quanto il residuo relativo alla serie delle variazioni dei prezzi presenta autocorrelazione ed eteroschedasticità condizionale altamente significative. Anche altri autori, analizzando altre serie e con altri approcci, hanno ottenuto dal modello mistura bivariata risultati poco lusinghieri; in particolare Liesenfeld (1998), che per la stima dei parametri ricorre alla tecnica di Monte Carlo basata su *importance-sampling*, arriva a proporre una parziale modifica nella specificazione della relazione che riguarda le variazioni dei prezzi.

In questo lavoro abbiamo riportato le conclusioni relative ad un solo titolo azionario, tuttavia, abbiamo ottenuto risultati non dissimili anche nello studio di altre serie relative a titoli azionari della Borsa italiana, quali: *Alleanza Assicurazioni, Edison, Eni, Fiat*.

Pur consapevoli della limitata efficienza delle stime ottenibili con i metodi simulativi - le stime sono consistenti ma la loro convergenza è lenta - riteniamo che le cause prevalenti del parziale insuccesso siano essenzialmente due. La prima è costituita dall'incapacità dell'unica variabile latente di spiegare strutture di correlazione seriali e di eteroschedasticità condizionale differenti presenti nelle due serie osservate, la seconda dal fatto di ipotizzare caratteristiche statistiche per le serie suddette - per esempio l'assenza di correlazione seriale in  $dp_t$  - non del tutto aderenti alla realtà. Secondo noi, il modello dovrebbe essere strutturato tenendo in maggior considerazione la realtà empirica, piuttosto che essere dedotto dall'interpretazione parzialmente astratta di comportamenti del mercato.

*Dipartimento di Metodi Quantitativi  
Università di Brescia*

ARIDE MAZZALI

## APPENDICE

*Simulazione con la tecnica del rigetto*

Sia  $Z$  una *v.c.* con funzione di densità  $f(z)$ . Per generare determinazioni casuali da  $f(\cdot)$ , è necessario individuare una densità  $g(\cdot)$  che, per ogni  $z$ , soddisfi il vincolo:  $f(z) \leq cg(z)$ , ove  $c$  è una costante. Ovviamente, conviene scegliere come  $g(\cdot)$  una densità dalla quale è agevole ottenere campioni casuali. Definiamo, poi, la funzione rapporto:  $h(z) = f(z)/(cg(z))$ , detta probabilità di accettazione, che, per quanto detto sopra, può assumere solo valori su  $[0, 1]$ :  $0 \leq h(z) \leq 1$ .

Sia ora  $u$  un numero casuale equidistribuito su  $[0,1]$  ed  $x$  un numero casuale ottenuto da  $g(\cdot)$ . Si può considerare  $x$  come una determinazione casuale proveniente da  $f(\cdot)$  se  $u \leq h(x)$ .

L'affermazione si dimostra provando che:

$$P\{X \leq x \mid u \leq h(x)\} = F(x),$$

ove  $F(x)$  denota la funzione di distribuzione cumulata di  $x$ .

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- T. G. ANDERSEN (1996), *Return Volatility and Trading Volume in Financial Markets. An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility*, "Journal of Finance", 51, pp. 169-204.
- B. D. O. ANDERSON, J. B. MOORE (1979), *Optimal filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- G.E.P. BOX, G.M. JENKINS (1970), *Times Series Analysis forecasting and control*, Holden Day, S. Francisco.
- P. CLARK (1973), *A Subordinated Stochastic process Model With Finite Variance for Speculative Process*, "Econometrica", 41, pp. 135-155.
- G. S. FISHMAN (1996), *Monte Carlo Concepts, Algorithms and Applications*, Berlin, Springer Verlag.
- C. HSU (1998), *Volume and The Nonlinear Dynamics of Stock Returns*, Springer Verlag, Berlin.
- J. M. KARPOFF (1987), *The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", 22, pp. 109-126.
- C. G. LAMOUREUX, W.D. LASTRAPES (1994), *Endogenous Trading Volume and Momentum in Stock- Return Volatility*, "Journal of Business & Economic Statistics", 12, pp. 253-260.
- R. LIESENFELD (1998), *Dynamic Bivariate Mixture Models: Modeling the Behavior of Price and Trading Volume*, "Journal of Business & Economic Statistics", 16, pp. 101-109.
- R. LIESENFELD (1998), *Dynamic Bivariate Mixture Models: Modeling the Behavior of Price and Trading Volume*, "Journal of Business & Economic Statistics", 16, pp. 101-109.
- H. RICHARDSON, T. SMITH (1994), *A Direct Test of the Mixture of Distributions Hypothesis: Measuring the Daily Flow of Information*. "Journal of Financial and Quantitative Analysis", 29, pp. 101-116.
- R.S. MARIANO, H. TANIZAKI, (1998), *Nonlinear and non-Gaussian state space modeling with Monte Carlo simulation*, "Journal of Econometrics", 83, pp. 263-290.
- H. TANIZAKI (1996), *Nonlinear Filters Estimation and Applications*, Springer Verlag, Berlin.
- G. E. TAUCHEN, M. K. PITTS, (1983), *The Price variability-Volume Relationship on Speculative Markets*, "Econometrica", 51, pp. 485-505.
- T. WATANABE (2000), *Bayesian Analysis of Dynamic Bivariate Mixture Models: Can They Explain the Behavior of Returns and Trading Volume?*, "Journal of Business & Economic Statistics", Vol. 18, 2, pp. 199- 210.

## RIASSUNTO

*Verifica empirica ed analisi critica del modello mistura bivariata*

I modelli mistura bivariati, introdotti da Tauchen-Pitts, cercano di spiegare la relazione tra la volatilità dei rendimenti ed il volume degli scambi nei mercati finanziari in termini di una variabile latente, rappresentante il numero degli arrivi di informazioni. In questo articolo, il modelli mistura bivariata con variabile latente autocorrelata, sono rappresentati come sistemi dinamici non lineari nell'equazione di misurazione. I parametri sono stimati con il metodo della massima verosimiglianza simulata, il processo latente con filtri non lineari simulati; in entrambi i casi la simulazione è basata sull'algoritmo del rigetto. I risultati ottenuti su dati giornalieri del mercato azionario italiano non sono in grado di spiegare né la correlazione seriale, né la persistenza della varianza della serie dei rendimenti.

## SUMMARY

*Empirical check and critical analysis of the dynamical bivariate mixture models*

Bivariate mixture models, introduced by Tauchen-Pitts, try to explain the relationship between return volatility and trading volume in financial markets, by stochastic changes in a single latent variable, representing the number of information arrivals. In this article, dynamic bivariate mixture models that allow for autocorrelation in the latent variable are represented by nonlinear state space systems, nonlinearity being due to the measurement equation. The parameters are estimated by simulated maximum likelihood and the latent variable by simulated non linear filter, both being based on the same rejection sampling algorithm. The results, based on Italian daily stock market data, reveal that dynamic bivariate mixture models neither can explain the autocorrelation, nor can account for the persistence in return variance.