STATISTICA, anno LXIV, n. 2, 2004

SUL TEOREMA DI PEREQUAZIONE DI AMATO HERZEL

G. Landenna, D. Marasini

1. INTRODUZIONE

L'idea di Italo Scardovi di volere mantenere viva la memoria di due autorevoli Professori – Alighiero Naddeo e Amato Herzel – attraverso la raccolta di contributi dedicati all'opera scientifica dei medesimi è quanto mai meritoria e, come membro della collettività degli statistici italiani, gliene sono veramente grato e grato altresì alla rivista "Statistica" che si è assunta l'onere del conseguente impegno editoriale.

Va comunque ricordato che in passato per onorare Naddeo ed Herzel sono già state scritte diverse note fra le quali alcune del sottoscritto; ma l'attuale invito di Scardovi mi dà l'opportunità di riprendere, in collaborazione con la Prof. Donata Marasini, il così detto "teorema di perequazione" che Herzel ha proposto in una forma alquanto sbrigativa e senza una conveniente premessa.

Scrive infatti: "Questo teorema [...] era certamente noto da sempre nella sostanza alla comunità degli statistici, ma non sembra che sia stato mai né esplicitamente enunciato, né impiegato nella teoria dei campioni. Eppure la sua utilità è fuori discussione" (Herzel, 1991). Per comprendere, per l'appunto, l'utilità del teorema in questione basti pensare che lo stesso, nel caso di campionamento che prevede ripetizioni, consente di pervenire a stimatori migliori in termini di efficienza e, inoltre, che nel contesto delle popolazioni finite, riduce il ben noto teorema di Rao-Blackwell ad un suo semplice corollario, teorema che, nel contesto in questione, è stato pressoché trascurato

Effettivamente il teorema merita maggiore attenzione da parte degli studiosi perché tramite il suo impiego è sempre possibile, in presenza di un piano di campionamento che prevede le ripetizioni, pervenire ad uno stimatore migliore in termini di efficienza.

L'articolazione della presente nota è la seguente. Nel secondo paragrafo vengono proposti alcuni richiami riguardanti il tema del campionamento e lo stimatore di Hansen e Hurwitz. Nel terzo paragrafo viene introdotto il "teorema di perequazione", mentre nel quarto viene proposta una sua particolare interpretazione che lo vede coinvolgere uno "pseudo campionamento a grappoli".

A conclusione viene fornita una esemplificazione per chiarire il suo impiego.

2. ALCUNI RICHIAMI

Sia P una popolazione costituita da N unità ciascuna contrassegnata da un numero intero al quale viene dato il nome di etichetta; inoltre sia $\mathbf{Y}$ il carattere oggetto d'attenzione che si manifesta su ognuna delle N unità di P dando luogo al così detto parametro $Y = \{y_1, ..., y_N\}$ della popolazione.

Con il proposito di stimare un'opportuna funzione $\theta = f(Y)$ di Y si ricorre ad un campione di ampiezza $n < N$ e sia Ω lo spazio campionario, ovvero l'insieme di tutte le n-uple di etichette (campioni) che possono formarsi a partire da N.

All'etichetta k viene associata una probabilità p_k di selezione della medesima, probabilità che può essere costante e pari a $1/N$, ovvero variabile secondo il piano di campionamento prescelto.

Si chiama piano di campionamento l'insieme delle probabilità $p(c)$ associate a ciascuno dei campioni c che formano Ω. Se il piano è con reinserimento, come si supporrà in tutto il seguito, la probabilità $p(c)$ è pari a $1/N^n$ nel caso costante, mentre nel caso di probabilità variabili è pari al prodotto delle probabilità di selezione di ognuna delle n etichette comprese nel campione, ossia $p(c) = \prod_{k \in c} p_k$, dove il simbolo $k \in c$ indica "al variare delle etichette comprese in c".

Con riguardo al parametro θ, se questo coincide con la media di Y, cioè se $\theta = \sum_{i=1}^{N} y_i / N$, uno degli stimatori più impiegati è quello dovuto a Hansen e a Hurwitz la cui generica determinazione è data da:

$$t_{HH} = \frac{1}{nN} \sum_{k \in c} \frac{y_k}{p_k} \tag{1}$$

Come è noto lo stimatore T_{HH} descritto dalla (1) è corretto e ha varianza pari a (Cicchitelli *et al*, 1997):

$$Var(T_{HH}) = \frac{1}{nN^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} p_i p_j \left(\frac{y_i}{p_i} - \frac{y_j}{p_j} \right)^2 \tag{2}$$

È immediato controllare che nel caso di piano di campionamento con probabilità costanti, la (1) si riduce all'usuale media campionaria $\bar{y}$ e la (2), con riguardo al corrispondente stimatore $\bar{Y}$, assume la forma:

$$Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{3}$$

dove $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \theta)^2 / N$ è la varianza di Y.

3. IL TEOREMA DI PEREQUAZIONE DI HERZEL

Ciò premesso, siano T uno stimatore corretto per il parametro θ e B_r un sottoinsieme dello spazio campionario Ω al quale risulta associato, tramite il piano di campionamento prescelto, probabilità $P(B_r) = \sum_{c \in B_r} p(c)$, dove $c \in B_r$ indica "al variare dei campioni compresi in B_r".
Sia T_r lo stimatore così definito:

$$T_r = \begin{cases} \sum_{c \in B_r} \dfrac{t_c p(c)}{p(B_r)} & c \in B_r \\ \\ T & c \notin B_r \end{cases} \tag{4}$$

essendo t_c il valore assunto da T sul campione c compreso in B_r, così che:

$$\sum_{c \in B_r} \frac{t_c p(c)}{p(B_r)} = \overline{t}_r \tag{5}$$

si presenta come media aritmetica ponderata dei valori assunti da T nel sottoinsieme B_r.
È del tutto agevole dimostrare (Landenna *et al.*, 1997) che:

$$E(T_r) = \theta \tag{6}$$

e:

$$Var(T_r) = Var(T) - \sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 p(c) \tag{7}$$

La (6) indica che anche T_r è stimatore corretto per θ e la (7) che la sua varianza è inferiore a quella di T, ossia T_r è stimatore più efficiente di T, a meno che t_c non sia costante su ogni campione compreso in B_r, nel qual caso la sommatoria che figura a secondo membro della (7) è nulla e T_r risulta avere la stessa efficienza di T.

Da quanto sopra discende che dato uno stimatore corretto T è sempre possibile migliorarlo, sotto il profilo dell'efficienza, a patto che B_r venga scelto in modo da consentire, una volta osservato un campione, di identificare i valori t_c per ogni altro campione compreso in B_r così da calcolare la media $\overline{t}_r$ fornita con la (5).

In tal caso, B_r deve contenere campioni particolari; ad esempio, osservato il campione c che contiene 1 volta l'etichetta h e $(n-1)$ volte l'etichetta k, B_r può essere costituito da tutti i possibili campioni di Ω che contengono u volte l'etichetta h e $(n-u)$ volte l'etichetta k, $(1 \le u \le n-1)$, come emergerà chiaramente dall'esemplificazione proposta in seguito.

Se B_r ha una struttura di questo tipo, l'osservazione di un solo campione $c \in B_r$ consente il calcolo di ogni t_c e quindi il calcolo della (5).

È ovvio che una volta migliorato, sotto il profilo dell'efficienza, T con lo stimatore T_r, si può migliorare quest'ultimo impiegando ancora il teorema di perequazione.

In particolare, scelto un secondo sottoinsieme B_s di Ω tale che $B_r \cap B_s = \varnothing$, il nuovo stimatore $T_{r,s}$ ottenuto tramite la perequazione ha la forma:

$$T_{r,s} = \begin{cases} \bar{t}_r & c \in B_r \\ \sum_{c \in B_s} \frac{t_c p(c)}{p(B_s)} & c \in B_s \\ T & c \notin B_r \cup B_s \end{cases} \tag{8}$$

con:

$$\sum_{c \in B_s} \frac{t_c p(c)}{P(B_s)} = \bar{t}_s$$

In modo analogo al precedente si dimostra che:

$$E(T_{r,s}) = \theta$$

$$Var(T_{r,s}) = Var(T_r) - \sum_{c \in B_s} (t_c - \bar{t}_s)^2 p(c) \tag{9}$$

$$= Var(T) - \left[\sum_{c \in B_r} (t_c - \bar{t}_r)^2 p(c) + \sum_{c \in B_s} (t_c - \bar{t}_s)^2 p(c) \right]$$

e la (9) conferma che $T_{r,s}$ è più efficiente di T_r e, di conseguenza, di T a meno che T non assuma valore costante su tutti i campioni $c \in B_s$; in tal caso $T_{r,s}$ ha la stessa efficienza di T_r.

Come B_r, anche B_s deve contenere campioni particolari che consentono, una volta osservatone uno, di determinare t_c sui campioni c di B_s.

Ad esempio, il campione osservato potrebbe contenere 1 volta l'etichetta h, 1 volta l'etichetta k e $(n-2)$ volte l'etichetta w. In tal caso B_s può essere costituito da tutti i campioni che contengono u volte l'etichetta h, v volte l'etichetta k e $(n - u - v)$ volte l'etichetta w, $(1 \leq u \leq n - 2,\ 1 \leq v \leq n - 2)$.

Il processo di miglioramento può continuare fino a che si perviene a M sottoinsiemi B_r di Ω. In particolare, fra gli M, vi sono N sottoinsiemi ciascuno costituito da un solo campione contenente una sola etichetta che si ripete n volte e $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ sottoinsiemi ognuno dei quali contiene sia un campione con n etichette tutte diverse tra loro sia gli $(n! - 1)$ campioni corrispondenti a tutte le possibili permutazioni delle medesime. Per quanto riguarda i restanti $M - [N - N(N-1)\cdots(N-n+1)]$ sottoinsiemi, ciascuno di questi ha una struttura del tipo di quella già descritta per B_r e per B_s. Si ha in definitiva $\Omega = \sum_{r=1}^{M} B_r$.

In tal caso lo stimatore migliore sotto il profilo dell'efficienza che si ottiene dal teorema di perequazione e che non è ulteriormente migliorabile con l'impiego del medesimo ha la forma:

$$T_{1,..,M} = \begin{cases} \bar{t}_1 & c \in B_1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{t}_r & c \in B_r \\ \vdots & \vdots \\ \bar{t}_M & c \in B_M \end{cases} \tag{10}$$

$T_{1,\dots,M}$ è stimatore corretto e ha varianza:

$$Var(T_{1,\dots,M}) = Var(T) - \sum_{r=1}^{M} \sum_{c \in B_r} (t_c - \bar{t}_r)^2 \, p(c) \tag{11}$$

Ma lo stimatore (10) viene proprio a coincidere con lo stimatore ottenuto partendo da T e impiegando il teorema di Rao-Blackwell, ovvero lo stimatore:

$$\tilde{T} = E(T \mid D) = T_{1,..,M} \tag{12}$$

dove D è la statistica sufficiente e minimale che elimina le ripetizioni e le permutazioni di etichette (Landenna *et al.*, 1997).

Come si è accennato nell'introduzione, il teorema di Rao-Blackwell non ha ricevuto grande attenzione nell'ambito delle popolazioni finite e un possibile motivo è che, in detto ambito, il concetto di statistica sufficiente e minimale viene sfumato, anzi sembra essere una forzatura.

Con il teorema di perequazione, invece, lo stimatore (10), ottenuto prescindendo dal ricorso a particolari statistiche, assume notevole importanza e, di conseguenza, viene rivalutato il teorema di Rao-Blackwell, inteso come suo corollario.

L'importanza consiste nel fatto che lo stimatore acquista in efficienza sfruttando semplicemente informazioni campionarie che, altrimenti, andrebbero perdute. In altri termini, se il campione osservato contiene le etichette (3,3,4) si perviene ai valori $\{y_3, y_3, y_4\}$ di $\mathbf{Y}$ ad esse associati; ma perché non utilizzare i valori medesimi che competono ai campioni con etichette (3,4,3) e (4,3,3) e altresì ai campioni con etichette (4,4,3), (4,3,4) e (3,4,4)? Ed è proprio questa la logica che guida il teorema di perequazione che nel caso in esame sintetizzerebbe le sei informazioni nel valore:

$$\bar{t} = \frac{t_1 p(3,3,4) + t_2 p(3,4,3) + t_3 p(4,3,3) + t_4 p(4,4,3) + t_5 p(4,3,4) + t_6 p(3,4,4)}{p(3,3,4) + p(3,4,3) + p(4,3,3) + p(4,4,3) + p(4,3,4) + p(3,4,4)}$$

dove $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ sono le determinazioni dello stimatore corretto T da cui si parte per il suo miglioramento.

4. LO PSEUDO CAMPIONAMENTO A GRAPPOLI

Come è noto l'usuale campionamento a grappoli comporta di suddividere le N unità di P in gruppi, o grappoli, in modo tale che venga soddisfatto il

Criterio 1: il carattere $\mathbf{Y}$ oggetto di attenzione presenta alta variabilità all'interno di ogni gruppo, cioè alta varianza residua, e bassa variabilità tra gruppo e gruppo, cioè bassa varianza spiegata.

Estratti casualmente *n* grappoli vengono esaminate tutte le unità di ciascun grappolo. Se la suddivisione è ben fatta, cioè soddisfa il criterio 1, il corrispondente stimatore corretto T_{gr} può risultare più efficiente dello stimatore T che si impiega prescindendo dalla suddetta suddivisione.

Il teorema di perequazione comporta una sorta di naturale suddivisione in grappoli, non delle N unità, bensì degli $N!$ possibili campioni che costituiscono lo spazio $\boldsymbol{\Omega}$ seguendo il

Criterio 2: se un grappolo contiene il campione costituito dall'etichetta *h*, dall'etichetta *k* ,... e da r volte l'etichetta *w*, il grappolo contiene altresì tutti e soli i campioni che comprendono *u* volte l'etichetta *h*, *v* volte l'etichetta *k*, ... e *s* volte l'etichetta *w*, per un numero totale di etichette pari a *n*.

Nel caso in esame l'osservazione di una sola *n*-upla viene a coincidere con l'estrazione di un grappolo con il conseguente esame di tutti i campioni in esso contenuti. Se T_r, $T_{r,s}$, ..., $T_{1,\ldots,M}$ sono gli stimatori corretti ottenuti ricorrendo, via via, a una prefissata suddivisione in grappoli, i medesimi sono sempre più efficienti dello stimatore T costruito a partire dalle N unità, come emerge dalle (7), (9) e (11) che possono così riproporsi:

$$Var(T) = \sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 \, p(c) + Var(T_r) \tag{13}$$

$$Var(T) = \sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 p(c) + \sum_{s \in B_s} (t_s - \overline{t}_r)^2 p(c) + Var(T_{r,s}) \tag{14}$$

$$Var(T) = \sum_{r=1}^{M} \sum_{c \in B_r} (t_c - \bar{t}_r)^2 p(c) + Var(T_{r,s}) \tag{15}$$

La (13) fornisce lo spezzamento della varianza di T conseguente alla suddivisione in grappoli dello spazio campionario Ω nel sottoinsieme B_r, che congloba i campioni con le caratteristiche di cui si è già detto, e nei restanti sottoinsiemi ciascuno formato da un solo campione. In tal senso $\sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 \, p(c)$ rappresenta la variabilità di T in B_r e assume il ruolo di varianza residua, mentre $Var(T_r)$ rappresenta la variabilità di T fra i grappoli e assume il ruolo di varianza spiegata.

Analogamente con riguardo alla (14), la medesima può considerarsi come un secondo spezzamento della varianza di T conseguente questa volta alla suddivisione di Ω nei due sottoinsiemi B_r e B_s e nei restanti ciascuno formato da una sola *n*-upla campionaria, così $\sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 \, p(c) + \sum_{c \in B_s} (t_c - \overline{t}_s)^2 \, p(c)$ viene a presentarsi come varianza residua, mentre $Var(T_{r,s})$ viene a presentarsi come varianza spiegata.

Altrettanto accade alla (15) che può interpretarsi come un ulteriore spezzamento della varianza di T in varianza residua $\sigma *_T^2 = \sum_{r=1}^{M} \sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 p(c)$ e in $\overline{\sigma}_T^2 = Var(T_{1,..,M})$ varianza spiegata.

La varianza spiegata, che di volta in volta coincide con la varianza dello stimatore ottenuto tramite il teorema di perequazione, risulta tanto più piccola quanto più grossolana è la partizione.

Infatti con riguardo, ad esempio, alla (13), Ω risulta suddiviso, oltre che in B_r, in sottoinsiemi dove la variabilità è nulla essendo costituiti da una sola *n-upla*, cioè da un solo valore t_c di T; ciò rende "bassa" la varianza residua e di conseguenza "alta" la varianza spiegata, cioè la varianza di T_r, in ogni caso minore della varianza di T.

Con riguardo alla (15) che comporta la partizione più grossolana di Ω, in ogni sottoinsieme di Ω esiste variabilità con la conseguenza che la varianza residua, somma ponderata delle varianze in ogni sottoinsieme, è massima, mentre minima risulta in via naturale la varianza spiegata, cioè la varianza di $T_{1,...,M}$.

In particolare il guadagno che si consegue in termini di varianza passando da T a $T_{1,\dots,M}$ è dato da:

$$G = \frac{\sigma *_T^2}{\sigma_T^2} = 1 - \frac{\bar{\sigma}_T^2}{\sigma_T^2} = 1 - \frac{Var(T_{1,\dots,M})}{Var(T)} \qquad (16)$$

5. UN ESEMPIO

La precedente ripartizione degli elementi di Ω e la costruzione dello stimatore $T_{1,\dots,M}$ verranno esemplificate supponendo dapprima che lo stimatore di partenza sia quello di Hansen-Hurwitz e successivamente l'usuale media campionaria $\bar{Y}$.

A tale proposito si supponga che la popolazione P sia costituita da $N = 4$ unità etichettate con i primi 4 numeri interi e sia $Y = \{y_1 = 10, y_2 = 50, y_3 = 100, y_4 = 240\}$ il parametro della popolazione. Siano: $p_1 = 0.10$, $p_2 = 0.15$, $p_3 = 0.30$, $p_4 = 0.45$ le probabilità di selezione di ciascuna delle 4 etichette. Fissato $n = 3$, la varianza dello stimatore di Hansen-Hurwitz impiegando la (2) risulta:

$$Var(T_{HH}) = 395.83 \qquad (17)$$

Si supponga ora di suddividere i $4^3 = 64$ campioni che costituiscono lo spazio campionario Ω secondo quanto proposto nel paragrafo precedente. In particolare risulta:

- B_1 costituito dall'unica terna (1,1,1) (18)
- B_2 costituito dall'unica terna (2,2,2)
- B_3 costituito dall'unica terna (3,3,3)
- B_4 costituito dall'unica terna (4,4,4)
- B_5 costituito sia da (1,2,3) e dalle sue 5 permutazioni
- B_6 costituito sia da (1,2,4) e dalle sue 5 permutazioni
- B_7 costituito sia da (1,3,4) e dalle sue 5 permutazioni
- B_8 costituito sia da (2,3,4) e dalle sue 5 permutazioni
- B_9 costituito sia da (1,1,2) e dalle sue 2 permutazioni, sia da (1,2,2) e dalle sue 2 permutazioni
- B_{10} costituito sia da (1,1,3) e dalle sue 2 permutazioni, sia da (1,3,3) e dalle sue 2 permutazioni

- B_{11} costituito sia da (1,1,4) e dalle sue 2 permutazioni, sia da (1,4,4) e dalle sue 2 permutazioni
- B_{12} costituito sia da (2,2,3) e dalle sue 2 permutazioni, sia da (2,3,3) e dalle sue 2 permutazioni
- B_{13} costituito sia da (2,2,4) e dalle sue 2 permutazioni, sia da (2,4,4) e dalle sue 2 permutazioni
- B_{14} costituito sia da (3,3,4) e dalle sue 2 permutazioni, sia da (3,4,4) e dalle sue 2 permutazioni

In tal modo si ha $\Omega = \bigcup_{r=1}^{14} B_r$. Calcolando le medie ponderate delle determinazioni assunte dallo stimatore T_{HH} su ciascuno dei 14 grappoli identificati, lo stimatore $T_{1,\dots,14}$ ottenuto impiegando la (10) assume i valori:

$$\overline{t}_1 = 25,\quad \overline{t}_2 = 83.33,\quad \overline{t}_3 = 83.33,\quad \overline{t}_4 = 133.33,\quad \overline{t}_5 = 63,88,\quad \overline{t}_6 = 80.55,\quad \overline{t}_7 = 80.55,$$

$$\overline{t}_8 = 100,\quad \overline{t}_9 = 56.11,\quad \overline{t}_{10} = 59.02,\quad \overline{t}_{11} = 90.65,\quad \overline{t}_{12} = 83.34,\quad \overline{t}_{13} = 112.5,\quad \overline{t}_{14} = 110$$

dove, ad esempio:

$$\overline{t}_{12} = \frac{\left[\left(2\frac{y_2}{p_2} + \frac{y_3}{p_3}\right)p_2^2 p_3 + \left(\frac{y_2}{p_2} + 2\frac{y_3}{p_3}\right)p_2 p_3^2\right]/4}{3(p_2^2 p_3 + p_2 p_3^2)} = 83.34$$

con:

$$P(B_{12}) = 3(p_2^2 p_3 + p_2 p_3^2) = 0.06$$

Poiché $T_{1,\dots,14}$ è corretto e ha media $\theta = 100$ risulta:

$$Var(T_{1,\dots,14}) = \sum_{r=1}^{14} (\overline{t}_r - \theta)^2 P(B_r) = \sum_{r=1}^{14} (\overline{t}_r - 100)^2 P(B_r) = 351.28 \tag{19}$$

Calcolando la varianza residua tramite l'espressione che figura nella (15) si ha:

$$\sum_{r=1}^{14} \sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 p(c) = 44.55 \tag{20}$$

Dalle (15), (19) e (20) emerge che:

$$Var(T_{1,\dots,14}) = 351.28 = 395.83 - 44.55 = Var(T_{HH}) - \sum_{r=1}^{14} \sum_{c \in B_r} (t_c - \overline{t}_r)^2 P(B_r)$$

con un guadagno di efficienza passando da T_{HH} a $T_{1,\ldots,14}$ che, ricordando la (16), è pari a:

$$G = 1 - \frac{351.28}{395.83} = 0.11$$

Concludendo, l'impiego del teorema di perequazione consente di modificare lo stimatore di Hansen-Hurwitz con un altro stimatore corretto che nel caso in esame porta ad un guadagno di efficienza dell'11%.

Con riguardo alla media campionaria $\bar{Y}$, stante la (3), risulta:

$$Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{3} = 2516.66$$

così che l'impiego del teorema di perequazione, ricorrendo alla stessa partizione di $\boldsymbol{\Omega}$ formata dai 14 sottoinsiemi B_r che figurano nella (18) porta allo stimatore $\bar{Y}_{1,\ldots,14}$ la cui varianza è pari a:

$$Var(\bar{Y}_{1,\ldots,14}) = 2202.08$$

Confrontando $\bar{Y}$ con $\bar{Y}_{1,\ldots,14}$ si ha un guadagno di efficienza con il primo rispetto al secondo pari a:

$$G = 1 - \frac{Var(\bar{Y}_{1,\ldots,14})}{Var(\bar{Y})} = 1 - \frac{2202.08}{2516.66} = 0.12\,.$$

Confrontando invece $T_{1,\ldots,14}$ con $\bar{Y}_{1,\ldots,14}$ si ha un guadagno di efficienza del primo rispetto al secondo pari a:

$$G = 1 - \frac{Var(T_{1,\ldots,14})}{Var(\bar{Y}_{1,\ldots,14})} = 1 - \frac{351.28}{2202.08} = 0.84\,.$$

Dipartimento di Statistica GIAMPIERO LANDENNA
Università degli Studi di Milano-Bicocca DONATA MARASINI

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

G. CICCHITELLI, A. HERZEL, G.E. MONTANARI (1997), *Il campionamento statistico*, Il Mulino, Bologna.

A. HERZEL (1991), *Inferenza su popolazini finite*, Atti del Convegno "Sviluppi metodologici nei diversi approcci all'inferenza statistica", vol. 2, Cagliari.

G. LANDENNA, D. MARASINI, P. FERRARI (1997), *Teoria della stima,* Il Mulino, Bologna.

RIASSUNTO

Sul teorema di perequazione di Amato Herzel

Nella presente nota viene ripreso il teorema di perequazione di Herzel con il proposito di mostrare l'utilità del medesimo nel contesto delle popolazioni finite. Dopo avere mostrato come il teorema di Rao-Blackwell diviene un suo corollario, viene fornita una particolare interpretazione di pseudo campionamento a grappoli.

SUMMARY

On Amato Herzel's perequation theorem

The aim of this paper is to show the importance of Herzel's perequation theorem in finite population sampling. We show that Rao-Blackwell's theorem is a corollary of the above mentioned perequation theorem and we refer to it as a pseudo cluster sampling.