





ordinate polari corrispondenti a  $x_1$  e a  $x_2$ . Si osservi che il vincolo su  $y$  di norma unitaria rende la distribuzione di  $y$  singolare; in altri termini la distribuzione di  $y$  è unidimensionale ed è sufficiente la distribuzione di  $y_1$  o di  $y_2$  a caratterizzarla univocamente. Si osservi inoltre che il campo di variazione di  $y_1$  e  $y_2$  è l'intervallo  $[-1, 1]$ . Con queste premesse vale pertanto la seguente proposizione.

*Proposizione 1.* La funzione di densità di probabilità di  $y_1$  è data da

$$f_{y_1}(u) = h(u, k, \rho) \quad u \in [-1, 1] \quad (2)$$

dove

$$h(u, k, \rho) = \frac{\sqrt{k}}{\pi} \left( \frac{g_1(\rho)}{g_1(u)} \right)^{1/2} \frac{g(u, k)}{(g(u, k))^2 - 4\rho^2 g_1(u) g_2(u, k)}$$

e

$$g_1(u) = (1 - u^2) \quad g_2(u, k) = ku^2 \quad g(u, k) = g_1(u) + g_2(u, k)$$

Alternativamente, la funzione di densità di probabilità di  $y_2$  è pari a  $f_{y_2}(u) = h(u, 1/k, \rho)$ ,  $u \in [-1, 1]$ .

Si osservi che la distribuzione in (2) non dipende da  $\theta$ . Questa osservazione è sufficiente a garantire che la distribuzione (2) rimanga inalterata anche assumendo che la distribuzione di  $x$  sia ottenuta come miscela di scala di normali.

*Corollario 2.* La funzione di densità (2) rimane immutata se  $x$  ha distribuzione ellittica.

#### 4. RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

I grafici in fig. 1-2 rappresentano la densità  $h(u, k, p)$  al variare di  $k$  e  $p$ . Si ricordi che per  $k = 1$  e  $p = 0$ ,  $\theta$  ha distribuzione uniforme sul cerchio di raggio unitario; la corrispondente distribuzione  $h(u, 1, 0) = \pi^{-1}(1 - u^2)^{-1/2}$  ha forma 'ad U'. Il grafico in fig. 1 mostra la densità  $h(u, k, p)$  per  $k$  fisso ( $k = 1$ ) al variare di  $p$ ,  $p = 0, 0,8, 0,95, 0,995$ . Al crescere del valore del coefficiente di correlazione lo scatter bidimensionale di  $x$  si concentra attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante; le ascisse corrispondenti del vettore base del complemento ortogonale  $y$  si addensano corrispondentemente attorno ai punti  $\pm \sqrt{2}/2$ , caratterizzanti l'intersezione della bisettrice del secondo e del quarto quadrante con il cerchio unitario.

Si consideri ora la densità  $h(u, k, p)$  per  $p$  fisso al variare del rapporto delle varianze  $k$ . Il grafico in fig. 2 descrive l'andamento per  $p = 0,5$  con  $k = 1, 10, 50, 500$ . All'aumentare della differenza fra le varianze, misurata dal rapporto  $k$ , lo scatter dei punti  $x$  si 'allunga' sempre più attorno all'asse delle ascisse. Corrispondentemente, la prima coordinata della base del complemento ortogonale  $y$  si addensa sempre più attorno a 0, valore dell'ascissa dell'intersezione dell'asse delle ordinate con il cerchio unitario.

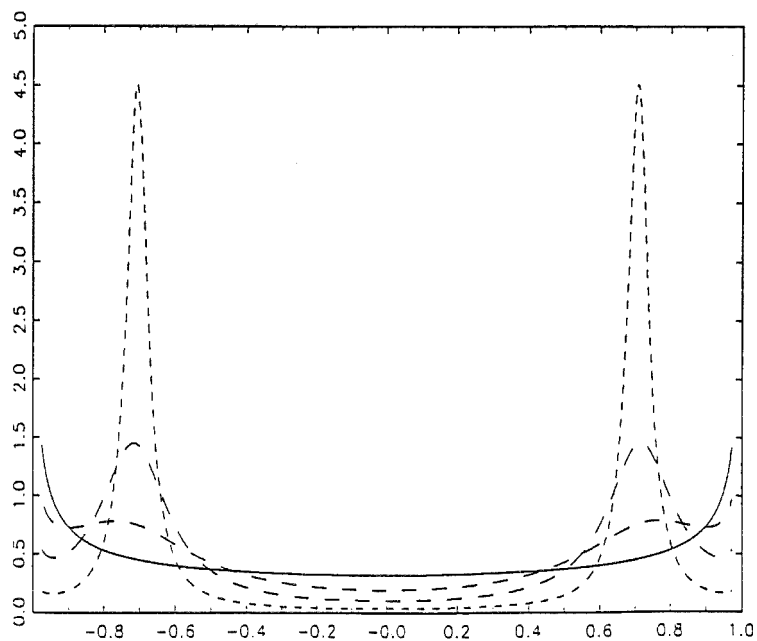


Figura 1 - Densità di probabilità  $b(u, k, p)$  per  $k=1$  e  $p=0, 0,8, 0,95, 0,995$ .

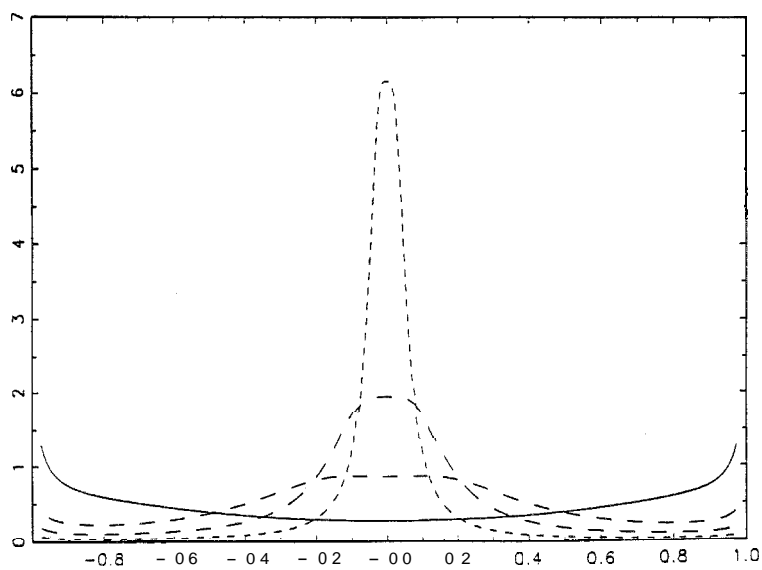


Figura 2 - Densità di probabilità  $b(u, k, p)$  per  $p=0,5$  e  $k=1, 10, 50, 500$

5. DIMOSTRAZIONI

La dimostrazione della proposizione 1 è preceduta dal seguente lemma, che riporta un ben noto risultato relativo alla distribuzione gaussiana.

*Lemma 3.* La funzione di densità di probabilità di  $\theta$  è data da

$$f_{\theta}(v) = (2\pi)^{-1}(kg_1(\rho))^{1/2}(1 - 2\rho \sqrt{k} \sin v \cos v + (k - 1) \sin^2 v)^{-1} \tag{3}$$

per  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Si osservi che anche tale distribuzione non dipende da  $\sigma^2$

*Dim. lemma 3.* La densità bivariata di  $r$  e  $\theta$  è data da

$$f_{r,\theta}(r, v) = (2\pi)^{-1} \sigma^{-2} (kg_1(\rho))^{-1/2} r \exp\left(-\frac{1}{2} r^2 \sigma^{-2} (kg_1(\rho))^{-1} a\right)$$

dove lo jacobiano della trasformazione da  $x$  a  $(r, \theta)$  è pari a  $r$  e  $a = 1 - 2\rho \sqrt{k} \sin v \cos v + (k - 1) \sin^2 v$ . La distribuzione marginale di  $\theta$  si ottiene integrando  $f_{r,\theta}(r, v)$  rispetto a  $r$ ; l'integrale è del tipo  $c_1 \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{1}{2} c_2 r^2\right) dr = c_1/c_2$ , dove  $c_1 = (2\pi)^{-1} \sigma^{-2} (kg_1(\rho))^{-1/2}$  e  $c_2 = \sigma^{-2} (kg_1(\rho))^{-1} a$ . Dividendo  $c_1$  per  $c_2$  si ottiene la (3). □

Si dimostra ora la proposizione 1.

*Dim. proposizione 1.* Sia  $1\{\cdot\}$  la funzione indicatrice e si divida il supporto della distribuzione di  $\theta$  nei sottointervalli  $A = \{\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2\}$ ,  $B = \{3\pi/2 < \theta < 2\pi\}$ ,  $C = \{0 \leq \theta < \pi/2\}$ . Si osservi che  $\theta = \arcsin(y_1)$  è una funzione biunivoca negli intervalli disgiunti  $A_1$  e  $A = B \cup C$ . Pertanto

$$f_{y_1}(u) = (g_1(u))^{-1/2} \sum_{i=1}^2 f_{\theta}(\arcsin(u)) 1\{\arcsin(u) \in A_i\},$$

dove  $(g_1(y_1))^{-1/2}$  è lo jacobiano della trasformazione da  $\theta$  a  $y_1$ . Sostituendo e semplificando si ottiene la (2); analogamente si procede per  $y_2$ . □

Si dimostra infine che il risultato vale anche per distribuzioni ellittiche.

*Dim. corollario 2.* Se  $x$  ha distribuzione ellittica, ha rappresentazione  $x = \sigma z$  con  $z \sim N(0, \Omega)$  e  $\sigma$  è una qualsiasi variabile aleatoria positiva (Fang *et al.*, 1990). La distribuzione (2) è la distribuzione di  $y_1$  condizionata a  $\sigma$ . Essendo la (2) indipendente da  $\sigma$ , essa coincide anche con la distribuzione marginale di  $y_1$ . □

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- M. COSTA, A. GARDINI, P. PARUOLO (1997), *A reduced rank regression approach to tests of asset pricing*, "Oxford Bulletin of Economics and Statistics", 59, pp. 163-181.
- K.T. FANG, S. KOTZ, K.W. NG (1990), *Symmetric multivariate and related distributions*, Chapman and Hall.
- G. HILLIER (1990), *On the normalization of structural equations: properties of direction estimators*, "Econometrica", 58, pp. 1181-1194.
- S. JOHANSEN (1995), *Likelihood based inference in cointegrated vector autoregressive models*, Advanced texts in econometrics, Oxford University Press.
- P. PARUOLO (1997), *Asymptotic inference on the moving average impact matrix in cointegrated I(1) VAR systems*, "Econometric Theory", 13, pp. 79-118.
- G.C. REINSEL, R.P. VELU (1998), *Multivariate reduced rank regression, theory and applications*, Lecture notes in Statistics 136, Springer Verlag, New York.
- F. VAHID, R. ENGLE (1993), *Common trends and common cycles*, "Journal of Applied Econometrics", 8, pp. 341-360.

## RIASSUNTO

*Sulla distribuzione di una base di norma unitaria del complemento ortogonale di un vettore gaussiano: il caso bidimensionale*

Questa nota illustra la distribuzione della base di norma unitaria del complemento ortogonale di un vettore aleatorio bidimensionale gaussiano. Si mostra inoltre che si ottiene la stessa distribuzione nel caso più generale di una distribuzione ellittica.

## SUMMARY

*The distribution of a unit norm basis of the orthogonal complement of a bidimensional Gaussian vector*

The present note shows the distribution of a unit norm basis of the orthogonal complement of a two-dimensional Gaussian random vector. It also shows that the same distribution can be obtained in the more general case of an elliptic distribution.