STATISTICA, anno LXIII, n. 2, 2003

PIANI D-OTTIMALI NON EQUIVALENTI DI RISOLUZIONE V CON N = 10, 12 OSSERVAZIONI

Luigi Salmaso

1. DEFINIZIONI PRINCIPALI

Gli esperimenti fattoriali completi pongono, in molte situazioni sperimentali problemi di costo per la loro realizzazione. E' allora possibile ricorrere ai piani frazionati che necessitano di un numero inferiore di osservazioni. I piani fattoriali frazionati presentano però lo svantaggio che gli effetti di alcuni fattori o interazioni risultano confusi con altri fattori o interazioni. Un piano quindi è tanto migliore quanto minore è il numero di effetti confusi fra loro. Un criterio per valutare la bontà di un piano è la risoluzione (Box e Hunter, 1961). In questo lavoro si caratterizzano e costruiscono i piani frazionati a due livelli *D*-ottimali al variare del numero di fattori principali *k*, per *N* = 10 e 12 osservazioni e si individua, per tali numerosità, il numero massimo di fattori principali che è possibile sistemare in un disegno *D*-ottimale di risoluzione *V*. Tali piani vengono caratterizzati anche in termini del criterio dei gradi di libertà (introdotto da Kounias e Salmaso, 1998): quanti più gradi di libertà il piano permette, tanto più potenti risultano i test sui parametri del modello lineare per l'analisi della varianza.

Si consideri l'usuale modello lineare per condurre l'analisi della varianza di un piano frazionato:

$$Y_{1\ldots N} = \mu + \sum_{i=1}^{k} A_i x_i + \sum_{1\le i<j\le k} A_{ij} x_i x_j + \sum_{1\le i<j<q\le k} A_{ijq} x_i x_j x_q + \ldots + e_{1\ldots N}$$

dove:
- $Y_{1\ldots N}$ è la variabile risposta;
- μ è la media generale;
- A_i è l'effetto dell'*i*-esimo fattore principale;
- A_{ij} è l'effetto dell'interazione fra due fattori principali;
- A_{ijq} è l'effetto dell'interazione fra tre fattori principali, ecc.;
- x_i sono i livelli di ogni fattore ($x_i = \pm 1$);
- $e_{1\ldots N}$ è l'errore sperimentale.

Definizione 1. La matrice (N x b) $M_{N,b}$ dove N è il numero di osservazioni, b = 1 + k + … + $\binom{k}{r}$, $2 \leq r \leq k$, $N \geq b$ e k è il numero di fattori principali:

$$M_{N,b} = [1 \vdots X_{N,k} \vdots P_x]$$

con 1 vettore (N x 1) di elementi +1, $X_{N,k}$ matrice del disegno (N x k) contenente i k fattori principali, P_x matrice $\left(N \times \left(\binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{r}\right)\right)$ contenente le interazioni fino all'ordine r, si dice matrice del modello. La matrice (b x b) $M_{N,b}^T M_{N,b}$ si dice matrice d'informazione.

Definizione 2. Un piano è di risoluzione R se nessuna interazione a p fattori è confusa (o alias) con altre interazioni a $s < (R - p)$ fattori, $\forall\, 0 < p < R$.

Assumendo trascurabili le interazioni di ordine maggiore o uguale al terzo, un disegno è di risoluzione *III* se i fattori principali sono confusi con le interazioni di secondo ordine, un disegno è di risoluzione *IV* se i fattori principali non sono confusi con altri fattori o interazioni ma le interazioni a due fattori sono confuse tra loro ed infine un disegno è di risoluzione *V* se i fattori principali e le interazioni a due fattori non sono confuse con altri fattori principali o interazioni.

Definizione 3. Sia $X_{N,k} = [f_1, f_2, \ldots, f_k]$ un disegno con N osservazioni e k fattori principali dove f_i indica il vettore di elementi ± 1 in corrispondenza del i-esimo fattore e sia $M_{N,b}^T M_{N,b}$ la corrispondente matrice d'informazione con $b = 1 + k + \binom{k}{2}$. Si indichi con m_{ij} l'elemento in corrispondenza della i-esima riga e della j-esima colonna della matrice d'informazione $M_{N,b}^T M_{N,b}$. Due fattori f_i e f_j, i ≠ j, $1 \leq i, j \leq b$ del disegno $M_{N,b}$ sono ortogonali se $m_{ij} = 0$; sono invece detti totalmente confusi se $m_{ij} = N$ e parzialmente confusi se $m_{ij} < N$.

Nel seguito per effetto stimabile si indica l'effetto del fattore o dell'interazione la cui colonna all'interno della matrice del modello non è totalmente confusa con una o più colonne della matrice stessa, altrimenti l'effetto si dice stimabile in modo confuso.

Definizione 4. Sia $X_{N,k}$ un disegno con N osservazioni, k fattori principali (compresa la media generale) e $\binom{k}{2}$ interazioni a due fattori. Si indichi con $(me)_j$, con $1 \leq j \leq k$ il vettore di elementi ± 1 in corrispondenza del j-esimo fattore principale del piano $X_{N,k}$ e con $(2fi)$, con $1 \leq j \leq \binom{k}{2}$, il vettore di elementi ± 1 in corrispondenza della j-esima interazione a due fattori del piano $X_{N,k}$.

Il piano $X_{N,k}$ è di risoluzione $R=III$ se $(me)_i^T(me)_j < N \quad \forall\, i \neq j,\ 1 \leq i,\ j \leq k$, $(me)_i^T(2fi)_j = N$ per almeno una coppia di elementi (i,j), $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \binom{k}{2}$.

Il piano $X_{N,k}$ è di risoluzione $R=IV$ se $(me)_i^T(me)_j < N \quad \forall\, i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k$, $(me)_i^T(2fi)_j < N\ \forall\, i \neq j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \binom{k}{2}$ e $(2fi)_i^T(2fi)_j = N$ per almeno una coppia di elementi (i,j), $1 \leq i, j \leq \binom{k}{2}$.

Infine il piano è di risoluzione V se $(me)_i^T(me)_j < N \quad \forall\, i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k$, $(me)_i^T(2fi)_j < N\ \forall\, i \neq j\ \ 1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \binom{k}{2}$ e $(2fi)_i^T(2fi)_j < N\ \ \forall\, i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq \binom{k}{2}$.

Definizione 5. Il disegno $(N \times b)M_{N,b} = [1 \vdots X_{N,k} \vdots P_X]$ sopra definito con $N \geq b$, si dice D-ottimale se $\det(M_{N,b}^T M_{N,b})$ è massimo. Si dice A-ottimale se la traccia di $M_{N,b}^T\, M_{N,b}$ è massima.

E' noto che i disegni ortogonali sono uniformemente ottimali (sono ottimali rispetto a una vasta gamma di criteri, D-ottimalità, A-ottimalità, ...). Per numerosità che sono potenze di due i disegni frazionati ortogonali ottimali con t fattori principali e $N = 2^k$ osservazioni con $k < t$, sono ottenuti aggiungendo al disegno fattoriale completo ortogonale con k fattori principali e 2^k osservazioni, altri $t - k$ fattori confusi con i k fattori principali. In questo modo la matrice del disegno con i t fattori principali risulta ortogonale. Non si effettua allo stesso modo la costruzione dei piani ottimali per frazioni irregolari (ovvero frazioni la cui numerosità non è una potenza di due), poichè tali frazioni non sempre garantiscono l'esistenza di matrici del disegno ortogonali. Allora se k è il numero di fattori principali d'interesse, a partire dal disegno avente il maggior numero k' di fattori principali ortogonali fra loro si considerano tutte le possibili combinazioni di elementi ± 1 che possono costituire le rimanenti $k - k'$ colonne e si individuano le colonne che soddisfano un fissato criterio di ottimalità.

2. DISEGNI D-OTTIMALI

Si consideri il disegno $M_{N,b}$ dove N è il numero di osservazioni e b il numero di fattori d'interesse. Il problema della costruzione dei disegni D-ottimali per numerosità $N \equiv 0 \bmod 4$ è riconducibile al problema della costruzione delle matrici di Hadamard affrontato da Hedayat e Wallis (1978) e da Plackett e Burman (1946) che sono giunti all'individuazione di molti disegni saturi di risoluzione III. In generale lo studio per numerosità pari a $N \neq 0$ mod 4 è stato affrontato, tra gli altri, da Ehlich (1964a, 1964b), Galil e Kiefer (1980,1982). I soli disegni D-ottimali noti con numero di osservazioni pari a $N \equiv 1$ mod 4 sono quelli per N = 5, 9, 13, 17, 21, 25, 41 invece per $N \equiv 3$ mod 4 Ehlich (1946b) ha dimostrato che un disegno $M_{N,b}$ è D-ottimale se $M^T_{N,b}M_{N,b}$ è una matrice (b x b) a blocchi tale per cui in ciascun blocco ogni elemento fuori dalla diagonale è uguale a 3 e ogni elemento fuori dai blocchi diagonali è pari -1. In particolare i disegni D-ottimali per N = 19, 23, 29, 31 osservazioni sono stati costruiti, attraverso l'utilizzo di matrici a blocchi, da Kounias e Chadjipantelis (1983).

Lo studio dei disegni per numerosità pari a $N \equiv 2$ mod 16 è stato affrontato da Chadjiconstantinidis, Cheng e Moyssiadis (1989) dimostrando che se esiste un disegno ortogonale con N - 2 osservazioni, b fattori ciascuno a due livelli di risoluzione V, allora esiste un disegno frazionato con N osservazioni di risoluzione V che è ottimale rispetto a una vasta classe di criteri di ottimalità. Tali disegni sono ottenuti aggiungendo due osservazioni ai disegni ortogonali con N - 2 osservazioni. E' stato invece dimostrato che i disegni con numerosità $N \equiv 1$ mod 2^{2t}, $t > 1$, ottenuti aggiungendo una osservazione ai piani ortogonali a due livelli con N - 1 osservazioni e risoluzione $2t + 1$, sono D-ottimali ed A-ottimali.

In letteratura lo studio dei disegni D-ottimali di risoluzione V è stato affrontato solo per disegni con numerosità pari a $N \equiv 2$ mod 16 (Chadjiconstantinidis, Cheng e Moyssiadis, 1989) mentre per numerosità uguale a $N \equiv 0$ mod 4 lo studio si è concentrato sui disegni saturi di risoluzione *III* (Plackett e Burman, 1946). Il contributo originale di questo lavoro consiste nella caratterizzazione, sia in termini della matrice del modello $M_{N,b}$ sia in termini della matrice d'informazione $M^T_{N,b}M_{N,b}$, di tutti i possibili disegni D-ottimali di risoluzione V con N = 10 e 12 osservazioni non equivalenti fra loro.

Definizione 6. Due piani si dicono equivalenti se uno di essi può essere ottenuto dall'altro permutando righe e/o colonne e/o moltiplicando tutti gli elementi di alcune o di tutte le colonne per (-1). Inoltre, due disegni sono equivalenti se uno di essi può essere ottenuto dall'altro attraverso ridenominazione di alcuni o di tutti i fattori.

3. DISEGNI D-OTTIMALI CON N = 12 OSSERVAZIONI E RISOLUZIONE V

Teorema 1. Il numero massimo di fattori principali che è possibile sistemare in un disegno di risoluzione V con N = 12 osservazioni è pari a 4.

Dimostrazione. Assumendo trascurabili tutte le interazioni di ordine maggiore o uguale al terzo, in un disegno fattoriale frazionato di risoluzione V sono stimabili in modo chiaro tutti i fattori principali e tutte le interazioni a due fattori. Sia k = 4 il numero di fattori principali. Ci sono allora $\binom{k}{2} = \binom{4}{2} = 6$ interazioni a due fattori. Si indichi con b il numero di parametri del modello lineare utilizzato per condurre l'analisi della varianza. Si ha allora $b = 1 + 4 + 6 = 11 < N$, dove N è il numero di osservazioni. Se invece $k \geq 5$, allora $b \geq (1+5+\binom{5}{2}) > N$ e si avrebbe così un numero di parametri nel modello superiore al numero di osservazioni. Si conclude allora che il numero massimo di fattori principali che è possibile sistemare in un disegno D-ottimale di risoluzione V è pari a 4. ■

Teorema 2. Sia $M_{N,b} = [1 \vdots X_{N,k} \vdots P_X]$ un disegno di risoluzione V, dove $N \equiv 0$ mod 4 è il numero di osservazioni, b è il numero di fattori d'interesse (fattori principali e interazioni) e $X_{N,k}$ è la matrice del disegno. Allora mediante permutazioni di righe e colonne, il disegno $M_{N,b}$ può essere ricondotto al disegno $M'_{N,b} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$, dove gli elementi a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} delle sottomatrici A, B, C sono tali per cui $a_{ii} = N$, $b_{ii} = N$, $a_{ij} = 0$ mod 4, $b_{ij} = 0$ mod 4, $c_{ij} = 2$ mod 4, $\forall\, i, j$. Inoltre le sottomatrici A, B e C hanno dimensioni n_t x n_t, $[n_b - n_t]$ x $[n_b - n_t]$, e n_t x $[n_b - n_t]$, rispettivamente, dove $n_b = 1 + k + \binom{k}{2}$ e $n_t = 1 + \binom{k}{2} - s(k - s - 1)$, dove k è il numero di fattori principali ed s è il numero di colonne della matrice del disegno $X_{N,k}$ con un numero pari di elementi +1.

Dimostrazione. Sia $X_{N,k} = [X_p \vdots X_d]$ la matrice del disegno ottenuta permutando le colonne in modo tale che in X_p si trovino solo colonne con un numero pari di elementi +1 e in X_d solo colonne con un numero dispari di elementi +1. La sottomatrice X_p ha dimensioni N x s mentre X_d ha dimensioni N x $(k - s)$, dove k è il numero di fattori principali, s è il numero di colonne della matrice del disegno con un numero pari di elementi +1 e N è il numero di osservazioni. Si indichino con $f_1, \ldots, f_s$ le colonne di X_p e con $f_{s+1}, \ldots, f_{k-s}$ le colonne di X_d. Allora $X_{N,k} = [f_1, ..., f_s \vdots f_{s+1, ..., f_k}]$ e la matrice del modello può essere scritta nel seguente modo:

$$M_{N,b} = [X_{1s} \vdots X_{2s}]$$

dove:

$$X_{1s} = [\mu, f_1, ..., f_s, f_1 \otimes f_2, ..., f_{s-1} \otimes f_s, f_{s+1} \otimes f_{s+2}, ..., f_{k-1} \otimes f_k],$$

$X_{2s} = [f_{s+1}, ..., f_k, f_1 \otimes f_{s+1}, f_1 \otimes f_k, ..., f_s \otimes f_{s+1}, ..., f_s \otimes f_k]$ dove $\otimes$ indica il prodotto di Kronecker.

La sottomatrice X_{1s} ha dimensioni N x n_t dove $n_t = 1 + s + \binom{s}{2} + \binom{k-s}{2}$ e X_{2s} ha dimensioni N x $(n_b - n_t)$ dove $n_b - n_t = (k - s)(s + 1)$. In X_{1s} ogni colonna ha un numero pari di elementi +1 mentre in X_{2s} ogni colonna ha un numero dispari di elementi +1. Si ha la seguente matrice d'informazione:

$$M_{N,b}^T M_{N,b} = \begin{bmatrix} X_{1s}^T X_{1s} & X_{1s}^T X_{2s} \\ X_{2s}^T X_{1s} & X_{2s}^T X_{2s} \end{bmatrix}$$

Siano v_1 e v_2 due vettori (N x 1) di elementi ± 1. Se $N = 0$ mod 4 e v_1 e v_2 hanno entrambi un numero pari di elementi +1 oppure entrambi un numero dispari di elementi +1, allora $v_1 \otimes v_2$ ha un numero pari di elementi +1 e $v_1^T v_2 = 0$ mod 4, altrimenti $v_1 \otimes v_2$ ha un numero dispari di elementi +1 e $v_1^T v_2 = 2$ mod 4. La matrice d'informazione coincide quindi con il disegno $M'_{N,b} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$ dove gli elementi a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} delle sottomatrici A, B, C sono tali che $a_{ii} = N$, $b_{ii} = N$, $a_{ij} = 0$ mod 4, $b_{ij} = 0$ mod 4, $c_{ij} = 2$ mod 4, $\forall\, i, j$. □

I disegni D-ottimali con $N = 12$ osservazioni e $k = 3$ e 4 fattori principali di risoluzione V sono costruiti aggiungendo nuove colonne di elementi ± 1 al disegno ortogonale $M_{12,2}$ con $N = 12$ osservazioni e $k = 2$ fattori principali in modo da massimizzare il determinante della matrice d'informazione.

$$M_{12,2} = [\mu, A, B] = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & - \\ + & + & - \\ + & + & - \\ + & - & + \\ + & - & + \\ + & - & + \\ + & - & - \\ + & - & - \\ + & - & - \end{bmatrix}$$

Sono stati individuati solo quattro disegni D-ottimali non equivalenti fra loro, fra tutti i possibili disegni con $N = 12$ osservazioni e $k = 3$ fattori principali. Invece fra tutti i possibili disegni con $k = 4$ fattori principali ottenuti aggiungendo ai disegni non equivalenti con 3 fattori principali una nuova colonna di elementi ± 1, esistono solo due piani non equivalenti fra loro (tali disegni sono riportati in Appendice). Sono state costruite anche le corrispondenti matrici d'informazione e si è verificato che tutte le colonne delle matrici del disegno hanno un numero dispari di elementi +1. In base al teorema precedente, tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale delle matrici d'informazione sono pari a $m_{ij} = 2$ mod 4 $\forall\, i \neq j$, $1 \leq i, j \leq b$, $b = 1 + k + \binom{k}{2}$ dove con m_{ij} si indica l'elemento in corrispondenza della i-esima riga e della j-esima colonna della matrice d'informazione e con b il numero di effetti d'interesse. E' inoltre possibile verificare che nessun elemento al di fuori della diagonale è uguale a 12. Quindi tutti i possibili disegni D-ottimali sono di risoluzione V e non esiste nessun disegno D-ottimale di risoluzione IV con N=12 osservazioni.

4. DISEGNI D-OTTIMALI CON $N = 10$ OSSERVAZIONI E RISOLUZIONE V

Teorema 3. Il numero massimo di fattori principali che è possibile sistemare in un disegno di risoluzione V con $N = 10$ osservazioni è pari a 3.

Dimostrazione. Assumendo trascurabili tutte le interazioni di ordine maggiore o uguale al terzo, in un disegno fattoriale frazionato di risoluzione V sono stimabili in modo chiaro tutti i fattori principali e tutte le interazioni a due fattori. Sia $k = 3$ il numero di fattori principali. Ci sono allora $\binom{k}{2} = \binom{3}{2} = 3$ interazioni a due fattori. Si indichi con b il numero di parametri del modello lineare utilizzato per condurre l'analisi della varianza. Si ha allora $b = 1 + 3 + 3 = 7 < N$, dove N è il numero di osservazioni. Se invece $k \geq 4$, allora $b \geq (1+4+\binom{4}{2}) > N$ e si avrebbe così un numero di parametri nel modello superiore al numero di osservazioni. Si conclude quindi che il numero massimo di fattori principali che è possibile sistemare in un piano D-ottimale di risoluzione a V è pari a 3. □

I disegni D-ottimali con $N = 10$ osservazioni e $k = 2$ e 3 fattori principali sono costruiti aggiungendo nuove colonne di elementi ± 1 al disegno ortogonale $M_{10,1}$ con $N = 10$ osservazioni e $k = 1$ fattori principali in modo da massimizzare il determinante della matrice d'informazione.

$$M_{10,1} = [\mu, A] = \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \\ + & + \\ + & + \\ + & + \\ + & - \\ + & - \\ + & - \\ + & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

I disegni così individuati sono riportati in Appendice e si noti che la configurazione delle matrici d'informazione di questi piani conferma uno dei risultati di Chadjiconstantinidis, Cheng, Moyssiadis (1989) secondo il quale la matrice del modello di un disegno fattoriale frazionato di risoluzione *V* è tale da poter essere ricondotta, tramite permutazione delle colonne, ad un disegno $M'_{N,b} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$ dove $C = 0$, $A = (N-2)I_{n_t} + 2J_{n_t}$, $B_{ij} = (N-2)I_{n_b - n_t} + 2J_{n_b - n_t}$ dove I_{n_t} indica la matrice identità di ordine n_t, J_{n_t} indica una matrice (n_t x n_t) di tutti elementi 1, $n_b = 1 + k + \binom{k}{2}$ e $n_t = 1 + \binom{k}{2} - s(k - s - 1)$, dove *k* è il numero di fattori principali ed *s* è il numero di colonne della matrice del disegno $X_{N,k}$ con un numero pari di elementi +1.

Come nel caso precedente, dalla configurazione delle matrici d'informazioni è possibile verificare che nessun elemento fuori dalla diagonale è uguale a 10. Quindi sono tutti i possibili disegni *D*-ottimali sono di risoluzione *V* e non esiste nessun disegno *D*-ottimale di risoluzione *IV* con *N* = 10 osservazioni.

5. CRITERIO DEI GRADI DI LIBERTÀ

Un importante criterio per valutare la bontà di un piano frazionato è il criterio dei gradi di libertà introdotto da Kounias e Salmaso (1998). Assumendo di condurre l'analisi della varianza di un esperimento fattoriale mediante un modello lineare, è infatti importante valutare i gradi di libertà che il piano permette per la stima della varianza dei residui: quanti più gradi di libertà il piano permette, tanto più potenti risultano i test sui parametri del modello lineare.

Teorema 4. I gradi di libertà che i disegni D-ottimali per *N* = 12 osservazioni e *k* = 3, 4 fattori principali permettono per la stima della varianza dei residui sono pari a 5 e 1 , rispettivamente.

Dimostrazione. I gradi di libertà che il piano permette per la stima della varianza dei residui sono *gdl* = *N* - (1 + *me* + *conf* + *cl*) dove *N* è il numero di osservazioni, *me* è il numero di fattori principali stimabili in modo chiaro, *conf* è il numero di interazioni a due fattori stimabili in modo confuso, *cl* è il numero di interazioni a due fattori stimabili in modo chiaro. Poichè i disegni *D*-ottimali per *N* = 12 osservazioni e *k* fattori principali, *k* = 3, 4, sono di risoluzione *V* allora $gdl = N - \left(1 + k + \binom{k}{2}\right)$, dove *k* è il numero di fattori principali. Se *N* = 12 e *k* = 3, allora *gdl* = 12 - (1 + 3 + 3) = 5; se *N* = 12 e *k* = 4, allora *gdl* = 12 - (1 + 4 + 6) = 1. □

Teorema 5. I gradi di libertà che i disegni D-ottimali per $N = 10$ osservazioni e $k = 2, 3$ fattori principali permettono per la stima della varianza dei residui sono pari a 6 e 3, rispettivamente.

Dimostrazione. I gradi di libertà che il piano permette per la stima della varianza dei residui sono $gdl = N - (1 + me + conf + cl)$. Poichè i disegni D-ottimali per $N = 10$ osservazioni e k fattori principali, $k = 2, 3$, sono di risoluzione V allora $gdl = N - (1 + k + \binom{k}{2})$, dove N è il numero di osservazioni, k è il numero di fattori principali. Se $N = 10$ e $k = 2$, allora $gdl = 10 - (1 + 2 + 1) = 6$; se $N = 10$ e $k = 3$, allora $gdl = 10 - (1 + 3 + 3) = 3$. □

6. APPENDICE

6.1. *Disegni con N = 12 osservazioni, k = 3 fattori principali e risoluzione* R = *V*

I disegno D-ottimali con $N = 12$ osservazioni e $k = 3$ fattori principali sono ottenuti aggiungendo un nuova colonna di elementi ± 1 al disegno ortogonale con $N = 12$ osservazioni costituito dalla media generale e da $k = 2$ fattori principali. Dati i primi due fattori A e B ortogonali, si riportano nella seguente tabella le colonne C_a, C_b, C_c, C_d che costituiscono le combinazioni di elementi ± 1 in corrispondenza del terzo fattore principale C in tutti i possibili disegni ottimali non equivalenti con $k = 3$ fattori principali.

C_a:	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	-	+
C_b:	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+
C_c:	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+
C_d:	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+

Le corrispondenti matrici d'informazione sono:

$$X_{C_a}^T X_{C_a} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 12 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_b}^T X_{C_b} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 12 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_c}^T X_{C_c} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 12 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_d}^T X_{C_d} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 12 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

6.2. *Disegni con* $N = 12$ *osservazioni,* $k = 4$ *fattori principali e risoluzione* $R = V$

I disegni *D*-ottimali con $N = 12$ osservazioni e $k = 4$ fattori principali sono ottenuti aggiungendo a ciascuno dei disegni non equivalenti con $N = 12$ osservazioni e $k = 3$ fattori principali, una nuova colonna di elementi ± 1. Dati i primi tre fattori *A*, *B* e *C*, si riportano nella seguente tabella le colonne C_a, C_b, D_c, C_d, C_e, C_f, C_g, C_h che costituiscono le combinazioni di elementi ± 1 in corrispondenza del quarto fattore principale *D* in tutti i possibili disegni ottimali non equivalenti con $k = 4$ fattori principali.

C_a:	-	-	+	+	-	+	-	+	+	-	+	-
C_b:	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	+	+
C_c:	-	-	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+
C_d:	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
C_e:	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-
C_f:	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
C_g:	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+
C_h:	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+

Le corrispondenti matrici d'informazione sono:

$$X_{C_a}^T X_{C_a} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 12 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & -4 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 12 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 12 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 12 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_b}^T X_{C_b} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 12 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 12 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 12 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 12 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_c}^T X_{C_c} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 12 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & -4 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 12 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 12 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_d}^T X_{C_d} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 12 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & 4 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 12 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 12 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 12 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 12 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_e}^T X_{C_e} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 & -2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & -4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 12 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 12 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 12 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_f}^T X_{C_f} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 2 & 12 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 2 & 12 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 12 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_g}^T X_{C_g} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 12 & 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & -4 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 12 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_h}^T X_{C_h} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 12 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & 4 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 12 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 12 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 12 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 12 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

6.3. *Disegni con* $N = 10$ *osservazioni,* $k = 2$ *fattori principali e risoluzione* $R = V$

I disegno D-ottimali con $N = 10$ osservazioni e $k = 2$ fattori principali sono ottenuti aggiungendo un nuova colonna di elementi ± 1 al disegno ortogonale con $N = 10$ osservazioni costituito dalla media e dal fattore principale A. Esiste un solo disegno non equivalente con $k = 2$ fattori principali. La combinazioni di elementi ± 1 in corrispondenza del fattore B risulta:

C_a:	-	+	+	-	+	-	+	+	-	+

La corrispondente matrice d'informazione è:

$$X_{C_{2a}}^{T} X_{C_{2a}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

6.4. *Disegni con* $N = 10$ *osservazioni,* $k = 3$ *fattori principali e risoluzione* $R = V$

I disegni D-ottimali con $N = 10$ osservazioni e $k = 3$ fattori principali sono ottenuti aggiungendo al disegno con $k = 2$ fattori principali, una nuova colonna di elementi ± 1.

Dati i primi due fattori principali A e B, si riportano nella seguente tabella le colonne C_a, C_b che costituiscono le combinazioni di elementi ± 1 in corrispondenza del terzo fattore principale C in tutti i possibili disegni ottimali non equivalenti con $k = 3$ fattori principali.

C_a:	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+
C_b:	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+

Le corrispondenti matrici del disegno sono:

$$X_{C_a}^{T} X_{C_a} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 10 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X_{C_b}^T X_{C_b} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 10 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali LUIGI SALMASO
Università di Padova

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

G.E.P. BOX, J.S. HUNTER, (1961), *The 2^{k-p} fractional factorial design*, "Technometrics", 3, pp. 311-351 e 449-458.

G.E.P. BOX, W.G. HUNTER, J.S. HUNTER, (1978), *Statistics for experiments*, Wiley, New York.

G.E.P. BOX, K.B. WILSON, (1951), *On the experimental attainment of optimum conditions*, "Journal of the Royal Statistical Society", 23, pp. 1-35.

S. CHADJICONSTANTINIDIS, C.S. CHENG, C. MOYSSIADIS, (1989), *Construction of Optimal fractional factorial resolution V designs with N ≡ 2 mod 16 observations*, "Journal of Statistical Planning and Inference", 23, pp. 153-161.

TH. CHADJIPANTELIS, S. KOUNIAS, C. MOYSSIADIS, (1987), *The maximum determinant of 21 x 21 (+1, -1)-matrices and D-optimal designs*, "Journal of Statistical Planning and Inference", 16, pp. 167-178.

H. EHLICH, (1964a), *Determinantenabshätzungen für binare Matrizen*, "Mathematische Zeitschrift", 84, pp. 438-447.

H. EHLICH, (1964b), *Determinantenabshätzungen für binare Matrizen mit n ≡ 3 mod 4*, "Mathematische Zeitschrift", 83, pp. 123-132.

P. FURLAN, L. SALMASO, (1998), *Il criterio dei gradi di libertà per piani frazionati con N = 16, 32 e 64 osservazioni*, "Statistica applicata", 11, pp. 643-669.

Z. GALIL, J. KIEFER, (1980), *D-optimum weighing designs*, "Annals of Statistics", 8, pp. 1293-1306.

Z. GALIL, J. KIEFER, (1982), *Construction methods for D-optimum weighing designs when n ≡ 3 mod 4*, "Annals of Statistics", 10, pp. 502-510.

A. GIOVAGNOLI, M.A. PANNONE, (1981), *Metodi algebrici per la costruzione di disegni fattoriali*, "Quaderno del gruppo di ricerca Geometrie Finite - Combinatoria, 3", Dipartimento di Matematica, Università di Perugia.

A. HEYDAYAT, W.D. WALLIS, (1978), *Hadamard matrices and their applications*, "Annals of Statistics", 6, 1184-1238.

S. KOUNIAS, TH. CHADJIPANTELIS, (1983), *Some D-optimal weighing designs for n ≡ 3 mod 4*, "Journal of Statistical Planning and Inference", 8, pp. 117-127.

S. KOUNIAS, N. FARMAKIS, (1984), *A construction of D-optimal weiching designs n ≡ 3 mod 4*, "Journal of Statistical Planning and Inference", 10, pp. 177-187.

S. KOUNIAS, L. SALMASO, (1997), *Experimental designs of resolution III, IV and V*, "Proceedings of the Conference of the Greek Statistical Institute", G.S.I. eds., Athens, 190-199.

S. KOUNIAS, L. SALMASO, (1998), *Orthogonal plans of resolution IV and V*, "Journal of the Italian Statistical Society", 7, 57-75.

R.L. PLACKETT, J.P. BURMAN, (1946), *The design of optimum multifactorial experiments*, "Biometrika", 33, pp. 305-325.

B.L. RAKTOE, A.A. HEDAYAT, W.T. FEDERER, (1981), *Factorial designs*, Wiley, New York.

L. SALMASO, (1996), *Orthogonal two level factorial designs of resolution III, IV and V*, Cleup editrice, Padova.

Y.S. SATHE, R.G. SHENOY, (1990), *Construction methods for some A- and D-optimal weighing designs when $N \equiv 3 \bmod 4$*, "Journal of Statistical Planning and Inference", 24, pp. 369-375.

RIASSUNTO

Piani D-ottimali non equivalenti di risoluzione V con N = 10, 12 osservazioni

In letteratura la costruzione dei disegni *D*-ottimali di risoluzione *V* è stata affrontata solo per disegni con numerosità pari a $N \equiv 2 \bmod 16$ (Chadjiconstantinidis, Cheng e Moyssiadis, 1989) mentre per numerosità uguale a $N \equiv 0 \bmod 4$ la costruzione di disegni saturi di risoluzione *III* è dovuta a Plackett e Burman (1946). Il contributo originale di questo lavoro consiste nella caratterizzazione, sia in termini della matrice del modello $M_{N,b}$ sia in termini della matrice d'informazione $M_{N,b}^T M_{N,b}$, di tutti i possibili disegni *D*-ottimali di risoluzione *V* con $N = 10$ e 12 osservazioni non equivalenti fra loro.

SUMMARY

D-optimal non-isomorphic designs of resolution V for N = 10, 12 runs

In the literature there are several contributions to the construction of resolution *V* *D*-optimal designs when $N \equiv 2 \bmod 16$ (Chadjiconstantinidis, Cheng and Moyssiadis, 1989). When $N \equiv 0 \bmod 4$ Plackett and Burman (1946) constructed several designs of resolution *III*. This paper introduces a new characterization for the construction of resolution *V* designs with $N = 10$, 12 observations. All non-equivalent designs for these number of runs are constructed.