STATISTICA, anno LXIII, n. 2, 2003

INFORMAZIONE DI FISHER E MODELLI TRONCATI (*)

Filippo Domma

1. INTRODUZIONE

Negli ultimi anni diversi autori hanno posto l'attenzione sull'interpretazione e l'utilità dell'informazione di Fisher, $i(\theta)$, circa il parametro incognito θ. In particolare, Efron e Johnstone (1990) dimostrano la relazione esistente tra la suddetta informazione e la *hazard function*. Park (1996) propone una scomposizione dell'informazione di Fisher al fine di semplificare i calcoli nel caso di statistiche d'ordine. Gertsbakh e Kagan (1999) esprimono $i(\theta)$ nella seguente relazione $i(\theta)=i^{(c)}(a;\theta)+[1-F(a;\theta)]\,i_a(\theta)$ dove $i^{(c)}(a;\theta)$ è l'informazione di Fisher contenuta in una osservazione censurata a destra in *a*, $F(a;\theta)$ è la funzione di ripartizione valutata in *a* e $i_a(\theta)$ è l'informazione nel caso di modello troncato a sinistra in *a*. Zheng e Gastwirth (2001) analizzano detta informazione nel caso di censura casuale. Di un certo interesse sembra essere l'interpretazione della quantità $\theta^2 i(\theta)$ in termini di elasticità della verosimiglianza fornita da Assunção (1996).

Nel presente lavoro si studia il comportamento dell'informazione di Fisher relativa a funzioni di densità troncate a destra e/o a sinistra in punti noti e costanti. Nel secondo paragrafo si evidenzia la relazione esistente tra l'informazione di Fisher nei modelli troncati [$i_{\ell r}(\theta)$] e l'analoga informazione nei modelli non-troncati [$i(\theta)$]. Dalla suddetta relazione, in generale, si evince che non è possibile stabilire se l'informazione di Fisher aumenta (o diminuisce) in conseguenza di una troncatura della funzione di densità in esame. Nel terzo paragrafo, ponendo l'attenzione alle sole famiglie esponenziali mono-parametriche, si individuano alcune condizioni che, se soddisfatte, consentono di stabilire qual è l'effetto di una troncatura della densità sull'informazione di Fisher. Vengono sviluppati, inoltre, alcuni esempi per evidenziare il comportamento della suddetta informazione al variare dei punti di troncatura.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del progetto di ricerca "*Modelli di durata: sviluppi metodologici ed applicazioni a fenomeni economico-sociali*" (PRIN 2001, resp. unità locale F. Domma).

2. L'INFORMAZIONE DI FISHER NEI MODELLI TRONCATI

Sia X una variabile casuale (v.c.) definita su $\Re$ con funzione di ripartizione e di densità, rispettivamente, date da $F_X(x;\theta)$ e $f_X(x;\theta)$, con $\theta \in \Theta \subset \Re$. Supponiamo che siano vere le consuete condizioni di regolarità relative alla funzione di densità (si veda, ad esempio, Lehmann (1983), pag. 452) ed indichiamo con $S_X = S_X(X;\theta) = \dfrac{\partial \ln f_X(X;\theta)}{\partial \theta}$ la funzione *score* e con $i(\theta) = E_X[S_X^2] = \int_{\Re} s_X^2 f_X(x;\theta)dx$ l'informazione di Fisher circa θ contenuta nella singola osservazione x.

La funzione di densità del modello troncato a *sinistra* ed a *destra* nei punti, rispettivamente, ℓ e r, noti e costanti, è

$$f_{\ell r}(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x;\theta)}{G(\ell,r;\theta)} & \text{per } \ell \le \mathrm{x} \le r \\ 0 & \text{per } x < \ell \text{ oppure } \mathrm{x} > r \end{cases} \tag{1}$$

[si veda, ad esempio, Cohen (1991), pag. 6] dove $G(\ell,r;\theta) = F_X(r;\theta) - F_X(\ell;\theta)$, con $F_X(t;\theta) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x;\theta)dx$.

Si può verificare che la funzione *score* relativa al modello troncato a destra ed a sinistra, $S_{\ell r}(X;\theta) = S_X(X;\theta) - \dfrac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial \theta}$, come nel caso non troncato, ha aspettativa pari a zero. Al fine di evidenziare la relazione esistente tra le informazioni di Fisher $i(\theta)$ e $i_{\ell r}(\theta)$, poniamo che siano vere le condizioni di regolarità in modo tale che $\dfrac{\partial G(\ell,r;\theta)}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\int_{\ell}^{r} \mathrm{f_X}(x;\theta)dx = \int_{\ell}^{r} \dfrac{\partial \mathrm{f_X}(x;\theta)}{\partial \theta}dx$. In tale contesto, l'informazione di Fisher circa θ contenuta in una osservazione x, relativa alla (1), è

$$i_{\ell r}(\theta) = \frac{i(\theta)}{G(\ell,r;\theta)} - \bar{K} \tag{2}$$

dove

$$\bar{K} = \left\{ \frac{1}{G(\ell,r;\theta)} \left[\int_{-\infty}^{\ell} s_x^2 f_X(x;\theta)dx + \int_{r}^{+\infty} s_x^2 f_X(x;\theta)dx \right] + \left[\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\}$$

(per la determinazione della (2) si rinvia in *Appendice*). Dalla (2) discendono i seguenti casi particolari:

c1. Informazione di Fisher per il modello troncato a destra nel punto *r*

$$\lim_{\ell \to -\infty} i_{\ell r}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{i(\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{F_X}(r;\boldsymbol{\theta})} + \\ -\left\{ \frac{1}{F_X(r;\boldsymbol{\theta})} \int_r^{+\infty} s_x^2 f_X(x;\boldsymbol{\theta})dx + \left[\frac{\partial \ln \mathrm{F_X}(r;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^2 \right\} = i_r(\boldsymbol{\theta}) \tag{3}$$

c2. Informazione di Fisher per il modello troncato a sinistra nel punto ℓ

$$\lim_{r \to +\infty} i_{\ell r}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{i(\boldsymbol{\theta})}{1 - \mathrm{F_X}(\ell;\boldsymbol{\theta})} + \\ -\left\{ \frac{1}{1 - F_X(\ell;\boldsymbol{\theta})} \left[\int_{-\infty}^{\ell} s_x^2 f_X(x;\boldsymbol{\theta})dx \right] + \left[\frac{\partial \ln\{1 - F_X(\ell;\boldsymbol{\theta})\}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^2 \right\} = i_\ell(\boldsymbol{\theta}) \tag{4}$$

c3. Per $\ell \to -\infty$ e $r \to +\infty$, si ha $i_{\ell r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{i}(\boldsymbol{\theta})$.

Da una semplice analisi delle relazioni (2), (3) e (4) si evince che *non è possibile* stabilire se l'informazione di Fisher ottenuta sotto le diverse ipotesi di troncatura [$i_{\ell r}(\boldsymbol{\theta})$, $i_r(\boldsymbol{\theta})$ e $i_\ell(\boldsymbol{\theta})$] sia maggiore, minore oppure uguale a $i(\boldsymbol{\theta})$. Tuttavia tali relazioni consentono di studiare l'ammontare di informazione contenuta in una osservazione circa $\boldsymbol{\theta}$, al variare dei punti di troncatura *r* ed ℓ.

Evidenziato che la derivata prima della funzione *score* nei modelli troncati è data da:

$$S'_{\ell r}(X;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial S_{\ell r}(X;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = S'_x(X;\boldsymbol{\theta}) - \frac{\partial^2 \ln G(\ell,r;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2},$$

e ricordando che l'informazione di Fisher, in condizioni regolari di stima, può essere scritta come segue $i(\boldsymbol{\theta}) = -\mathrm{E}_X[S'_X] = -\int_{\Re} s'_X f_X(x;\boldsymbol{\theta})dx$, analogamente a quanto fatto in precedenza, si può verificare che:

$$i_{\ell r}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{i(\boldsymbol{\theta})}{G(\ell,r;\boldsymbol{\theta})} + \tilde{K} \tag{5}$$

dove

$$\tilde{K} = \left\{ \frac{1}{G(\ell,r;\boldsymbol{\theta})} \left[\int_{-\infty}^{\ell} \frac{\partial s_x}{\partial \boldsymbol{\theta}} f_X(x;\boldsymbol{\theta})dx + \int_r^{+\infty} \frac{\partial s_x}{\partial \boldsymbol{\theta}} f_X(x;\boldsymbol{\theta})dx \right] + \frac{\partial^2 \ln G(\ell,r;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right\}$$

Si osservi che la (5) è solo un modo diverso di esprimere la (2), infatti tenuto conto che

$$\frac{\partial^2 \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta^2}=\frac{1}{G(\ell,r;\theta)}\frac{\partial^2 G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta^2}-\left(\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right)^2$$

e

$$s'_x=\frac{1}{f_x(x;\theta)}\frac{\partial^2 f_x(x;\theta)}{\partial\theta^2}-(s_x)^2,$$

dopo qualche passaggio algebrico si verifica che $\overline{K}=-\widetilde{K}$.

Esempio 1. (Esponenziale negativa). Sia data la v.c. X con funzione di densità e ripartizione, rispettivamente date da

$$f_X(x;\theta)=\theta e^{-\theta x} \qquad x>0,\ \theta>0$$
$$F_X(x;\theta)=1-e^{-\theta x}.$$

E' noto che per detta v.c. la funzione *score* e l'informazione di Fisher sono, rispettivamente, $s_X=\frac{1}{\theta}-x$ e $i(\theta)=\frac{1}{\theta^2}$. Per ciò che segue è utile determinare, per $0<\tau<\infty$, i seguenti momenti incompleti:

$$\mathrm{E}_\tau[X]=\int_0^\tau x\theta e^{-\theta x}dx=\frac{1}{\theta}-e^{-\theta\tau}\left[\tau+\frac{1}{\theta}\right] \tag{6}$$

$$\mathrm{E}_\tau[X^2]=\int_0^\tau x^2\theta e^{-\theta x}dx=\frac{2}{\theta^2}-e^{-\theta\tau}\left[\tau^2+\frac{2\tau}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right]. \tag{7}$$

Al fine di determinare $i_{\ell r}(\theta)$ utilizzando la (2), calcoliamo le seguenti quantità:

$$\int_0^\ell s_x^2 f_x(x;\theta)dx=\frac{1}{\theta^2}\int_0^\ell \theta e^{-\theta x}dx-\frac{2}{\theta}\int_0^\ell x\theta e^{-\theta x}dx+\int_0^\ell x^2\theta e^{-\theta x}dx=$$
$$=\frac{1}{\theta^2}F_X(\ell;\theta)-\frac{2}{\theta}\mathrm{E}_\ell[X]+\mathrm{E}_\ell[X^2],$$

ponendo $\tau=\ell$ nella (6) e nella (7), dopo qualche passaggio, si ottiene:

$$\int_0^\ell s_x^2 f_x(x;\theta)dx=\frac{1}{\theta^2}-e^{-\theta\ell}\left(\frac{1}{\theta^2}+\ell^2\right);$$

inoltre, si ha:

$$\int_r^{+\infty} s_x^2 f_x(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} s_x^2 f_x(x;\theta)dx - \int_0^r s_x^2 f_x(x;\theta)dx =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{F_X(r;\theta)}{\theta^2} + \frac{2}{\theta}\mathrm{E}_r(X) - \mathrm{E}_r[X^2] = e^{-\theta r}\left(r^2 + \frac{1}{\theta^2}\right);$$

ed, infine, abbiamo che

$$\frac{\partial \ln G(\ell, r;\theta)}{\partial \theta} = \frac{re^{-\theta r} - \ell e^{-\theta \ell}}{e^{-\theta \ell} - e^{-\theta r}}.$$

Tenendo conto delle relazioni appena descritte, dopo qualche passaggio, si ha:

$$i_{\ell r}(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{e^{-\theta(\ell + r)}(r-\ell)^2}{(e^{-\theta \ell} - e^{-\theta r})^2}.$$

Da quest'ultima si evidenzia che, per $\ell \to 0^+$ e con r ipotizzato costante, si ottiene l'informazione di Fisher di una esponenziale negativa troncata in r, cioè $i_r(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{r^2 e^{-\theta r}}{(1-e^{-\theta r})^2}$. Inoltre, se $r \to +\infty$ ed ℓ è tenuto costante, è immediato verificare che $i_\ell(\theta) = \frac{1}{\theta^2} = i(\theta)$, ovvero una troncatura a sinistra della funzione di densità di una variabile casuale esponenziale negativa non influenza l'informazione di Fisher, tale risultato è noto come *lack-of-memory property* dell'informazione di Fisher (Gertsbakh e Kagan, 1999).

Risulta interessante valutare il comportamento di $i_{\ell r}(\theta)$ al variare dei punti di troncatura. A tal fine, è sufficiente studiare la funzione

$$B(r, \ell;\theta) = -\frac{e^{-\theta(\ell + r)}(r-\ell)^2}{(e^{-\theta \ell} - e^{-\theta r})^2} = -\frac{e^{\theta(\ell + r)}(r-\ell)^2}{(e^{\theta r} - e^{\theta \ell})^2}$$

per $\ell < r$, al variare di ℓ ed r.

Posto che ℓ sia fissato, si ha:

$$\lim_{r \to \ell^+} B(r;\ell,\theta) = -\lim_{r \to \ell^+} \frac{e^{-\theta(\ell + r)}(r-\ell)^2}{(e^{-\theta \ell} - e^{-\theta r})^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$\lim_{r \to +\infty} B(r;\ell,\theta) = -\lim_{r \to +\infty} \frac{e^{-\theta(\ell + r)}(r-\ell)^2}{(e^{-\theta \ell} - e^{-\theta r})^2} = 0.$$

Inoltre, per $\ell < r$, la derivata prima di $B(\ell, r;\theta)$ rispetto ad r, dopo qualche passaggio, risulta essere uguale a

$$B'(r,\ell;\theta)=\frac{(r-\ell)}{(e^{\theta r}-e^{\theta\ell})^{3}}\{e^{\theta(2\ell+r)}[2+\theta(r-\ell)]-e^{\theta(\ell+2r)}[2-\theta(r-\ell)]\}$$

la quale è strettamente maggiore di zero perché $e^{-\theta(r-\ell)}>\dfrac{2-\theta(r-\ell)}{2+\theta(r-\ell)}$, $\forall\ r>\ell>0$. Si deduce, di conseguenza, che al variare del punto di troncatura *r*, $0\le i_{\ell r}(\theta)\le i(\theta)=\dfrac{1}{\theta^2}$. In particolare, da quanto suesposto si può dire che tanto più il punto di troncatura *r* si sposta verso il punto ℓ, tanto più piccola sarà l'informazione di Fisher $i_{\ell r}(\theta)$.

Conseguenza immediata di tale risultato è il seguente: se lo stimatore di massima verosimiglianza di θ esiste e se sono soddisfatte le condizioni che garantiscono la normalità asintotica, allora detto stimatore presenta una varianza asintotica che aumenta all'aumentare della quota della "coda destra" troncata.

Posto che *r* sia fissato, si ha

$$\lim_{\ell\to 0^+}B(\ell;r,\theta)=-\lim_{\ell\to 0^+}\frac{e^{-\theta(\ell+r)}(r-\ell)^2}{(e^{-\theta\ell}-e^{-\theta r})^2}=-\frac{r^2e^{-\theta r}}{(1-e^{-\theta r})^2}$$

$$\lim_{\ell\to r^-}B(\ell;r,\theta)=-\lim_{\ell\to r^-}\frac{e^{-\theta(\ell+r)}(r-\ell)^2}{(e^{-\theta\ell}-e^{-\theta r})^2}=-\frac{1}{\theta^2}.$$

Inoltre, la derivata prima rispetto ad ℓ della funzione $B(\ell,r;\theta)$ è data da

$$B'(\ell;r,\theta)=\frac{(r-\ell)}{(e^{\theta r}-e^{\theta\ell})^{3}}\{e^{\theta(\ell+2r)}[2-\theta(r-\ell)]-e^{\theta(2\ell+r)}[2+\theta(r-\ell)]\}$$

la quale è sempre negativa $\forall\ \ell\in(0,r)$. Quindi, la funzione $B(\ell;r,\theta)$ risulta essere decrescente rispetto ad ℓ. Di conseguenza, anche $i_{\ell r}(\theta)$ è una funzione decrescente in ℓ e, inoltre, all'aumentare di ℓ,

$$i(\theta)>i_r(\theta)=\frac{1}{\theta^2}-\frac{r^2e^{-\theta r}}{(1-e^{-\theta r})^2}\ge i_{\ell r}(\theta)\ge 0.$$

In definitiva, con riferimento ad una v.c. esponenziale negativa, si può concludere affermando che una troncatura a sinistra riduce l'informazione di Fisher se vi è una contemporanea troncatura a destra.

L'esempio appena descritto sembra suggerire che se la funzione di densità appartiene alla famiglia esponenziale mono-parametrica, allora è possibile affermare che $i_{\ell r}(\theta)<i(\theta)$. In realtà, nel prossimo paragrafo si verifica che non è possibile dimostrare tale congettura, ma si evidenziano alcune condizioni che consentono

di valutare se l'informazione di Fisher aumenta o diminuisce in conseguenza di una troncatura della funzione di densità.

3. LE FAMIGLIE ESPONENZIALI MONO-PARAMETRICHE

Interessanti esemplificazioni si ottengono ipotizzando che la funzione di densità considerata appartenga alla famiglia esponenziale (mono-parametrica) la quale, come è noto, presenta la seguente forma

$$f(x;\theta) = e^{c(\theta)d(x)-a(\theta)+b(x)} \tag{8}$$

dove $c(.)$ e $a(.)$ sono funzioni reali del parametro θ, mentre $d(.)$ e $b(.)$ sono funzioni della v.c. X con supporto indipendente da θ [si veda, ad esempio, Landenna e Marasini (1992), pag. 23]. E' altresì noto che per il modello (8) sono valide le condizioni di regolarità.

Si verifica facilmente che l'informazione di Fisher relativa alla (8) è:

$$i(\theta) = -c''(\theta)\mathrm{E}[d(X)] + a''(\theta)$$

dove con $c''(\theta)$ e $a''(\theta)$ sono state indicate le derivate seconde di $c(\theta)$ e di $a(\theta)$ rispetto a θ. Dalle proprietà della funzione *score* si dimostra che $\mathrm{E}[d(X)] = \dfrac{a'(\theta)}{c'(\theta)}$ e, quindi, l'informazione $i(\theta)$ diventa (Cox e Hinkley (1974), pag. 112):

$$i(\theta) = c''(\theta)\left[-\frac{a'(\theta)}{c'(\theta)} + \frac{a''(\theta)}{c''(\theta)}\right] = c'(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{a'(\theta)}{c'(\theta)}\right]. \tag{9}$$

E' noto, inoltre, che dalla definizione di informazione di Fisher si può calcolare la varianza della funzione $d(X)$. Infatti, si ha:

$$i(\theta) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = [c'(\theta)]^2\mathrm{E}\left[\left(d(X) - \frac{a'(\theta)}{c'(\theta)}\right)^2\right] = [c'(\theta)]^2 V[d(X)]$$

e sostituendo in quest'ultima la (9), si ottiene

$$V[d(X)] = \frac{c''(\theta)}{[c'(\theta)]^2}\left[-\frac{a'(\theta)}{c'(\theta)} + \frac{a''(\theta)}{c''(\theta)}\right].$$

La densità descritta dalla (8) troncata a sinistra e a destra nei punti, rispettivamente, ℓ ed r, noti e costanti, appartiene ancora alla famiglia esponenziale [Barndorff-Nielsen e Cox (1994), pag. 78-79] e può essere espressa nel seguente modo

$$f_{\ell\, r}(x;\theta)=\begin{cases} e^{c(\theta)d(x)-A(\theta;\ell,r)+b(x)} & \text{per } -\infty<\ell\le x\le r<+\infty \\ 0 & \text{altrove}\end{cases} \tag{10}$$

dove $A(\theta;\ell,r)=a(\theta)+\ln G(\ell,r;\theta)$. In tale situazione, l'aspettativa della funzione *d(X)* è data da

$$\mathrm{E}_{\ell\, r}[d(X)]=\frac{A'(\theta;\ell,r)}{c'(\theta)}=\mathrm{E}[d(X)]+\frac{1}{c'(\theta)}\frac{\partial\ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}$$

e, da quest'ultima, ricaviamo agevolmente l'informazione di Fisher relativa al modello (10), cioè

$$i_{\ell\, r}(\theta)=-c''(\theta)\mathrm{E}_{\ell\, r}[d(X)]+A''(\theta;\ell,r)=$$

$$=i(\theta)-\left[\frac{c''(\theta)}{c'(\theta)}\right]\frac{\partial\ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta^2}\,. \tag{11}$$

Esempio 2. Consideriamo una v.c. Beta di parametri 1 e θ, con funzione di ripartizione $F(x;\theta)=1-(1-x)^{\theta}$ e funzione di densità espressa in forma esponenziale data da

$$f(x;\theta)=e^{\theta\ln(1-x)+\ln(\theta)-\ln(1-x)} \quad \text{per } \theta>0 \text{ e } \; x\in(0,1)$$

con $c(\theta)=\theta$, $a(\theta)=-\ln(\theta)$, $d(x)=\ln(1-x)$ e $b(x)=-\ln(1-x)$. Osservato che $c''(\theta)=0$, dalla (9) è immediato calcolare l'informazione di Fisher contenuta in una osservazione circa il parametro θ, cioè

$$i(\theta)=-c''(\theta)\frac{a'(\theta)}{c'(\theta)}+a''(\theta)=\frac{1}{\theta^2}\,.$$

La funzione di densità troncata a sinistra e a destra nei punti, rispettivamente, ℓ ed r, con $0<\ell<r<1$, è data da

$$f_{\ell r}(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{e^{\theta\ln(1-x)+\ln(\theta)-\ln(1-x)}}{G(\ell,r;\theta)} & \text{per } 0<\ell\le x\le r<1 \\ 0 & \text{altrove}\end{cases} \tag{12}$$

dove $G(\ell,r;\theta)=(1-\ell)^{\theta}-(1-r)^{\theta}$. Per il calcolo dell'informazione di Fisher si osservi che $c''(\theta)=0$ e, quindi, la (11) si semplifica nella seguente

$$i_{\ell\, r}(\theta)=i(\theta)+\frac{\partial^2\ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta^2}\,.$$

Si verifica, inoltre, che

$$\frac{\partial^2 \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{(1-r)^{\theta}(1-\ell)^{\theta}[\ln(1-r)-\ln(1-\ell)]^2}{[G(\ell,r;\theta)]^2}\,.$$

In definitiva, l'informazione di Fisher circa il parametro θ contenuta in una osservazione, relativa al modello (12) risulta essere:

$$i_{\ell r}(\theta)=\frac{1}{\theta^2}-\frac{(1-r)^{\theta}(1-\ell)^{\theta}[\ln(1-r)-\ln(1-\ell)]^2}{[G(\ell,r;\theta)]^2}\,.$$

Si può osservare che per $\ell \to 0^+$ ed r ipotizzato costante, si ottiene l'informazione di Fisher di una v.c. Beta troncata a destra in r, cioè

$$i_{r}(\theta)=\frac{1}{\theta^2}-\frac{(1-r)^{\theta}[\ln(1-r)]^2}{[1-(1-r)^{\theta}]^2}\,.$$

Per ottenere l'informazione relativa al modello troncato a sinistra, bisogna supporre ℓ costante e valutare $\lim\limits_{r\to 1^-} i_{\ell r}(\theta)$. Considerato che $\lim\limits_{r\to 1^-}(1-r)^{\theta}[\ln(1\text{-}r)]^2=0$, si ha: $\lim\limits_{r\to 1^-} i_{\ell r}(\theta)=\dfrac{1}{\theta^2}=i(\theta)$. Quest'ultima relazione ci informa che una troncatura a sinistra della densità in esame non l'informazione di Fisher.

Esempio 3. (Dagum con λ=1 e $\delta=\delta_0$). Il modello di Dagum (1977, 1980) a tre parametri, utilizzato per la descrizione ed interpretazione della distribuzione del reddito, presenta la seguente funzione di densità

$$f(x;\beta,\lambda,\delta)=\beta\lambda\delta x^{-\delta-1}(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta-1}$$

con $x>0$ e $\beta>0$, $\delta>0$ e $\lambda>0$, e funzione di ripartizione pari a $F(x;\beta,\lambda,\delta)=(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta}$. Ai fini del presente lavoro, studieremo il caso particolare in cui $\lambda=1$ e $\delta=\delta_0$ costante nota; tale densità espressa in forma esponenziale risulta essere

$$f(x;\beta,\delta_0)=\exp\{-\beta\ln(1+x^{-\delta_0})+\ln(\beta)+\ln(\delta_0)-[(\delta_0+1)\ln(x)+\ln(1+x^{-\delta_0})]\}$$

In quest'ultima, si riconoscono le seguenti funzioni $c(\beta)=\beta$, $d(x)=-\ln(1+x^{-\delta_0})$, $b(x)=\ln(\delta_0)-[(\delta_0+1)\ln(x)+\ln(1+x^{-\delta_0})]$ e $a(\beta)=-\ln(\beta)$. Poiché $c''(\beta)=0$ dalla (9) si ha: $i(\beta)=\dfrac{1}{\beta^2}$.

L'informazione di Fisher relativa al modello troncato a sinistra ed a destra nei punti noti e costanti, ℓ ed r, dalla (11) è data da

$$i_{\ell r}(\beta) = i(\beta) + \frac{\partial^2 \ln G(\ell, r; \beta)}{\partial \beta^2}$$

dove $G(\ell, r; \beta) = (1 + r^{-\delta_0})^{-\beta} - (1 + \ell^{-\delta_0})^{-\beta}$. Si può verificare che, dopo qualche passaggio algebrico, si ottiene

$$\frac{\partial^2 \ln G(\ell, r; \beta)}{\partial \beta^2} = -\frac{(1 + r^{-\delta_0})^{-\beta}(1 + \ell^{-\delta_0})^{-\beta}\{\ln(1 + r^{-\delta_0}) - \ln(1 + \ell^{-\delta_0})\}^2}{[(1 + r^{-\delta_0})^{-\beta} - (1 + \ell^{-\delta_0})^{-\beta}]^2}$$

e, quindi, è vera la seguente diseguaglianza $i_{\ell\, r}(\beta) < i(\beta)$. Posto che r sia costante, per $\ell \to 0^+$, utilizzando la regola di de l'Hopital, otteniamo l'informazione di Fisher relativa al modello troncato a destra in r, cioè $\lim_{\ell \to 0^+} i_{\ell\, r}(\beta) = \frac{1}{\beta^2} = i_r(\beta)$; poiché coincide con $i(\beta)$, si può concludere che una troncatura a destra del modello di Dagum, con $\lambda=1$ e $\delta=\delta_0$, non influenza l'informazione di Fisher (*lack-of-memory property for right truncation*). Tale risultato è stato ottenuto da Domma (1997), anche per altra via. D'altra parte, se ipotizziamo ℓ costante, per $r \to +\infty$ otteniamo l'informazione di Fisher relativa al modello troncato a sinistra

$$i_\ell(\beta) = \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1 + \ell^{-\delta_0})^{-\beta}[\ln(1 + \ell^{-\delta_0})]^2}{[1 - (1 + \ell^{-\delta_0})^{-\beta}]^2},$$

dalla quale discende che $i_\ell(\beta) < i(\beta)$.

3.1. *Alcuni rilevanti casi particolari*

In questa sezione, con riferimento alla famiglia esponenziale, si dimostra, innanzitutto, che la differenza tra $i(\theta)$ ed $i_{\ell r}(\theta)$ è minore di una quantità positiva e, quindi, non è possibile, in generale, stabilire se una troncatura produce un incremento nella informazione di Fisher. Successivamente, ponendo l'attenzione su alcuni rilevanti casi particolari, si stabiliscono le condizioni sotto le quali una troncatura della famiglia esponenziale conduce ad un incremento (decremento) di detta informazione.

Analogamente a quanto fatto in precedenza, determiniamo la varianza della funzione $d(X)$ sotto il modello (10). Da semplici calcoli si ottiene $V_{\ell\, r}[d(X)] = \frac{i_{\ell\, r}(\theta)}{[c'(\theta)]^2}$ e tenendo conto della (9) e della (11), dopo qualche passaggio, si perviene alla seguente espressione:

$$V_{\ell\, r}[d(X)] = \frac{1}{[c'(\theta)]^2}\left\{a''(\theta) + \frac{\partial^2 \ln G(\ell, r; \theta)}{\partial \theta^2} - \frac{c''(\theta)}{c'(\theta)}\left[a'(\theta) + \frac{\partial \ln G(\ell, r; \theta)}{\partial \theta}\right]\right\}$$

Da semplici operazioni algebriche sulla (11), è possibile evidenziare che il segno della differenza tra $i(\theta)$ ed $i_{\ell r}(\theta)$ dipende dalla differenza tra $V[d(X)]$ e $V_{\ell\, r}[d(X)]$, cioè

$$i(\theta) - i_{\ell\, r}(\theta) = [c'(\theta)]^2 \{V[d(X)] - V_{\ell\, r}[d(X)]\}\,. \tag{13}$$

Quanto segue dimostra che la differenza tra le due varianze presenti nella (13) è sempre minore di una quantità positiva. Posto per semplicità $\mu = \mathrm{E}[d(X)]$, $I_r = \int_r^{+\infty} [d(x) - \mu]^2 f(x;\theta)dx$, $I_\ell = \int_{-\infty}^{\ell} [d(x) - \mu]^2 f(x;\theta)dx$ e $\mu_{\ell\, r} = \mathrm{E}_{\ell\, r}[d(X)]$ segue che la varianza di *d(X)* può essere espressa nella seguente forma:

$$V[d(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [d(x) - \mu]^2 f(x;\theta)dx =$$

$$= I_\ell + I_r + \int_\ell^r \{[d(x) - \mu_{\ell r}] + [\mu_{\ell r} - \mu]\}^2 f(x;\theta)dx$$

e osservato che $\int_\ell^r d(x) f(x;\theta)dx = \mu_{\ell r} G(\ell, r; \theta)$, dopo alcuni passaggi, si ha:

$$V[d(X)] = I_\ell + I_r + [\mu_{\ell\, r} - \mu]^2 G(\ell, r;\theta) + \int_\ell^r [d(x) - \mu_{\ell\, r}]^2 f(x;\theta)dx\,.$$

Inoltre, poiché $G(\ell, r; \theta) \in (0,1)$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\int_\ell^r [d(x) - \mu_{\ell\, r}]^2 f(x;\theta)dx < \frac{1}{G(\ell, r;\theta)} \int_\ell^r [d(x) - \mu_{\ell\, r}]^2 f(x;\theta)dx = V_{\ell\, r}[d(X)]$$

da cui, si può concludere, in definitiva, che

$$V[d(X)] - V_{\ell\, r}[d(X)] < I_\ell + I_r + [\mu_{\ell\, r} - \mu]^2 G(\ell, r;\theta)\,. \tag{14}$$

Dato che il membro di destra della (14) è una quantità positiva non possiamo stabilire il segno della differenza tra $V[d(X)]$ e $V_{\ell r}[d(X)]$ e, di conseguenza, il segno tra $i(\theta)$ ed $i_{\ell r}(\theta)$. Tuttavia, vi sono rilevanti casi particolari in cui è possibile, sotto opportune condizioni, stabilire il segno della differenza tra le varianze in esame.

L'analisi che segue ha come obiettivo quello di individuare, se esistono, le condizioni tali per cui una troncatura a destra della famiglia esponenziale conduce ad un incremento nell'informazione di Fisher. Supponiamo, dunque, che $\ell \to -\infty$ e consideriamo la seguente funzione

$$\xi(r;\theta) = V[d(X)] - V_r[d(X)] \tag{15}$$

dove $V_r[d(X)] = \int_{-\infty}^{r} [\mathrm{d(x)} - \mu_r]^2 \frac{f(x;\theta)}{F(r;\theta)} dx$, con $\mu_r = \mathrm{E}_r[d(X)]$.

Ricordando la (13), l'obiettivo suddetto è raggiunto una volta individuati, se esistono, i valori di r tali che la funzione espressa dalla (15) risulta essere negativa. A tal fine, si osservi che $\lim_{r\to+\infty} \xi(r;\theta) = 0$ e che

$$\frac{\partial \xi(r;\theta)}{\partial r} = \frac{f(r;\theta)}{F(r;\theta)} \{V_r[d(X)] - [d(r) - \mu_r]^2\}.$$

Se $\lim_{r\to+\infty} f(x;\theta) = \varepsilon > 0$, $\lim_{r\to+\infty} d(r) = 0$ e se il coefficiente di variazione di $d(X)$, indicato con $CV[d(X)]$, è maggiore di uno, allora

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\partial \xi(r;\theta)}{\partial r} = \varepsilon\mu^2 \{CV[d(X)]^2 - 1\} > 0.$$

Quest'ultima ci informa che esiste un intervallo del tipo $(R,+\infty)$ tale per cui la (15) è crescente. Inoltre, considerato che $\lim_{r\to+\infty} \xi(r;\theta) = 0$ possiamo concludere dicendo che esiste un punto R tale che $\forall\ r \in (\mathrm{R}, +\infty)$, $\xi(r;\theta) < 0$ e, quindi, dalla (13) discende che $i(\theta) < i_r(\theta)$.

Risultati analoghi si ottengono se consideriamo la sola troncatura a sinistra della famiglia esponenziale. In tal caso, la funzione da considerare è la seguente

$$\xi(\ell;\theta) = V[d(X)] - V_\ell[d(X)]$$

dove $V_\ell[d(X)] = \int_{\ell}^{+\infty} [\mathrm{d(x)} - \mu_\ell]^2 \frac{f(x;\theta)}{1 - F(\ell;\theta)} dx$, con $\mu_\ell = E_\ell[d(X)]$.

Si verifica facilmente che $\lim_{\ell\to-\infty} \xi(\ell;\theta)=0$ e che

$$\frac{\partial \xi(\ell;\theta)}{\partial \ell} = \frac{f(\ell;\theta)}{1 - F(\ell;\theta)} \{[d(\ell) - \mu_\ell]^2 - V_\ell[d(X)]\}.$$

Se $\lim_{\ell\to-\infty} f(x;\theta) = \eta > 0$, $\lim_{\ell\to-\infty} d(x) = 0$ e se $CV[d(X)]$, è maggiore di uno, allora

$$\lim_{\ell \to -\infty} \frac{\partial \xi(\ell;\theta)}{\partial \ell} = \eta\mu^2\{1 - CV[d(X)]^2\} < 0$$

da quest'ultima possiamo affermare che esiste un L tale che $\forall \ell \in (-\infty, L)$, $\xi(\ell;\theta) < 0$ e, quindi, $i(\theta) < i_\ell(\theta)$.

Si fa osservare che quanto appena esposto rappresenta una generalizzazione del lavoro di Mullooly (1988). Per illustrare tale situazione, si consideri la densità della v.c. gamma di parametri λ e k_0, quest'ultimo per ipotesi noto e minore di 1; detta densità espressa in forma esponenziale risulta essere data da

$$f(x;\lambda,k_0) = \exp\{-\lambda x + k_0 \ln(\lambda) + (k_0 - 1)\ln(x) - \ln\Gamma(k_0)\}$$

con $d(x)=x$, $c(\lambda)=-\lambda$, $a(\lambda) = -k_0 \ln(\lambda)$ e $b(x) = (k_0 - 1)\ln(x) - \ln\Gamma(k_0)$, dove $\Gamma(k_0)$ è la funzione gamma valutata in k_0. E' noto, inoltre, che $\mathrm{E}(X) = \frac{k_0}{\lambda}$ e $V(X) = \frac{k_0}{\lambda^2}$. Dato che $c''(\lambda)=0$, dalla (9) l'informazione di Fisher è uguale a: $i(\lambda) = a''(\lambda) = V(X) = \frac{k_0}{\lambda^2}$. Si evidenzia che, relativamente ad una troncatura a sinistra di tale modello, le condizioni viste in precedenza sono soddisfatte. Infatti, il coefficiente di variazione dato da $CV(X) = (k_0)^{-\frac{1}{2}}$ è maggiore di 1 perché per ipotesi $k_0<1$, $\lim_{x \to o^+} f(x;\lambda,k_0) = +\infty$ e $\lim_{x \to o^+} d(x) = 0$. Di conseguenza, esiste un L tale che $\forall \ell \in (0, L)$ si ha un incremento nell'informazione di Fisher. Al fine di sottolineare le conclusioni, riportiamo alcuni valori numerici relativi alle informazioni di Fisher. La densità della v.c. gamma troncata a sinistra nel punto noto e costante ℓ risulta essere

$$f_\ell(x;\lambda,k_0) = \frac{f(x;\lambda,k_0)}{1 - F(\ell;\lambda,k_0)} \quad \text{per} \quad 0 < \ell \le x < +\infty$$

dove $F(\ell;\lambda,k_0)$ è la funzione di ripartizione della v.c. gamma valutata in ℓ. Da quanto detto in precedenza, poiché $[c'(\lambda)]^2 = 1$, l'informazione di Fisher relativa al modello troncato a sinistra, è data da $i_\ell(\lambda) = V_\ell(X)$. E' evidente che, in tal caso, la differenza tra le informazioni di Fisher coincide esattamente con la differenza tra le varianze di X nei due modelli. Al fine di determinare $V_\ell(X)$, calcoliamo il momento di ordine j

$$\mathrm{E}_\ell[X^j] = \frac{\left\{\mathrm{E}(X^j) - \frac{1}{\lambda^j\Gamma(k_0)}\int_0^{\lambda\ell} y^{j+k_0-1}e^{-y}dy\right\}}{1 - F(\ell;\lambda,k_0)} = \frac{\Gamma(k_0 + j) - \gamma(k_0 + j;\ \lambda\ell)}{\lambda^j[\Gamma(k_0) - \gamma(k_0;\ \ell)]}$$

dove con $\gamma(a,b)=\int_0^b y^{a-1}e^{-y}dy$ si è indicata la funzione gamma incompleta [si veda, ad esempio, Gradshteyn e Ryzhik (1980), pag. 940]. A titolo d'esempio, nella tavola 1, per λ=*1.2*, si riportano alcuni valori numerici di $V(X)$ e $V_\ell(X)$, da cui emerge chiaramente che $V_\ell(X)>V(X)$ e, quindi, dalla (13) $i(\lambda)<i_\ell(\lambda)$.

TAVOLA 1

Confronto tra le varianze $V(X)$ e $V_\ell(X)$ di una v.c. Gamma al variare del punto di troncatura, per λ=1.2 e per alcuni valori di k_0.

ℓ	K_0	V(X)	V_ℓ(X)
0.5	0.3	0.2083333	0.506273
	0.5	0.3472222	0.573225
	0.7	0.4861111	0.649368
2	0.3	0.2083333	2.06252
	0.5	0.3472222	2.111674
	0.7	0.4861111	2.161969
5	0.3	0.2083333	7.530068
	0.5	0.3472222	7.712481
	0.7	0.4861111	7.895071

In conclusione del presente lavoro riportiamo alcuni interessanti risultati relativi alla v.c. Normale troncata.

Esempio 4. (Normale, con $\sigma=\sigma_0$ noto). Data una v.c. normale di media $\mu\in\Re$ incognita e varianza nota, con funzioni di densità $\phi(x;\mu)$, funzione di ripartizione $\Phi(x;\mu)$ e informazione di Fisher circa μ contenuta in una osservazione pari a $i(\mu)=\dfrac{1}{\sigma_0^2}$.

La funzione di densità troncata a sinistra in ℓ e a destra in *r*, risulta essere:

$$\phi_{\ell r}(x;\mu)=\begin{cases}\dfrac{\phi(x;\mu)}{\Phi(r;\mu)-\Phi(\ell;\mu)} & -\infty<\ell\le x\le r<+\infty \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}. \tag{16}$$

Da quanto suesposto, l'informazione di Fisher circa μ contenuta in una osservazione, può essere determinata utilizzando la seguente: $i_{\ell\,r}(\theta)=[c'(\theta)]^2V_{\ell\,r}[d(X)]$. Dato che nel caso in esame $d(X)=X$, possiamo utilizzare alcuni risultati noti in letteratura circa i momenti di una normale troncata. In particolare, si dimostra (Johnson e Kotz, 1970, pag. 83) che

$$V_{\ell r}(X) = \sigma_0^2 - \frac{\sigma_0^2}{\Phi(r;\mu) - \Phi(\ell;\mu)}\{(\mu-\ell)\phi(\ell;\mu) +$$

$$+(r-\mu)\phi(r;\mu) + \sigma_0^2 \frac{[\phi(\ell;\mu)-\phi(r;\mu)]^2}{\Phi(r;\mu) - \Phi(\ell;\mu)}\bigg\}.$$

Utilizzando quest'ultima e la (13) si ottiene:

$$i_{\ell\, r}(\mu) = i(\mu) - \left\{ \frac{(\mu-\ell)\phi(\ell;\mu) + (r-\mu)\phi(r;\mu)}{\sigma_0^2[\Phi(r;\mu) - \Phi(\ell;\mu)]} + \left[\frac{\phi(\ell;\mu)-\phi(r;\mu)}{\Phi(r;\mu)-\Phi(\ell;\mu)} \right]^2 \right\}$$

Se $\ell < \mu < r$ si evidenzia che l'informazione di Fisher relativa al modello descritto dalla (16) è minore dell'informazione di Fisher di una v.c. $N(\mu,\sigma_0^2)$ in quanto gli elementi all'interno della parentesi graffa sono tutti positivi.

Una formulazione particolare $i_{\ell r}(\mu)$ si ottiene ipotizzando simmetria rispetto alla media μ dei punti di troncatura. In tale contesto, se $(\mu-\ell)=(r-\mu)$, dato che $\phi(\ell;\mu)=\phi(r;\mu)$ e $\Phi(r;\mu)=1-\Phi(\ell;\mu)$, si ha

$$i_{\ell r}(\mu) = i(\mu) - \left\{ \frac{2(\mu-\ell)\phi(\ell;\mu)}{\sigma_0^2[1-2\Phi(\ell;\mu)]} + \left[\frac{\phi(\ell;\mu)}{1-2\Phi(\ell;\mu)} \right]^2 \right\}.$$

In fine, se consideriamo una normale troncata a destra in *r*, l'informazione di Fisher diventa:

$$i_r(\mu) = i(\mu) - \left\{ \frac{(r-\mu)\phi(r;\mu)}{\sigma_0^2\Phi(r;\mu)} + \left[\frac{\phi(r;\mu)}{\Phi(r;\mu)} \right]^2 \right\}.$$

Posto $r = \mu$, si ha:

$$i_\mu(\mu) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) i(\mu) = (0.36338)i(\mu),$$

cioè l'informazione di Fisher del modello normale troncato a destra in μ risulta essere circa un terzo della analoga informazione relativa al modello non-troncato. Evidentemente, cose del tutto analoghe succedono se consideriamo la densità normale troncata a sinistra.

4. CONCLUSIONI

In questo lavoro abbiamo studiato la relazione esistente tra l'informazione di Fisher relativa ad una generica funzione di densità e quella relativa ad una densità troncata a sinistra e/o a destra in punti noti e costanti. Da tale relazione non si può stabilire se l'informazione aumenta o diminuisce in conseguenza della troncatura della funzione di densità.

Nell'ambito delle famiglie esponenziali mono-parametriche, sono state ottenute rilevanti semplificazioni di detta relazione. In particolare, si è evidenziato che il segno della differenza tra le suddette informazioni di Fisher, dipende dalla differenza tra le varianze, $V[d(X)]$ e $V_{\ell r}[d(X)]$, della statistica sufficiente e completa $d(X)$ associata alle famiglie esponenziali. Sulla base di quest'ultimo risultato sono state determinate alcune condizioni che, se soddisfatte, consentono di stabilire il segno della differenza tra le suddette informazioni di Fisher. Quest'ultimo aspetto è oggetto di ulteriori approfondimenti.

APPENDICE

Si riportano i passaggi essenziali per la determinazione dell'informazione di Fisher relativa alla densità troncata a sinistra e a destra.

$$i_{\ell r}(\theta) = \mathrm{E}_{\ell r}\{S_{\ell r}^2\} = \int_\ell^r s_{\ell r}^2 f_{\ell r}(x;\theta)dx = \frac{1}{G(\ell,r;\theta)}\int_\ell^r s_X^2 f_X(x;\theta)dx +$$

$$+\left\{\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 \int_\ell^r f_{\ell r}(x;\theta)dx - 2\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\int_\ell^r s_X f_{\ell r}(x;\theta)dx =$$

$$= \frac{1}{G(\ell,r;\theta)}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s_X^2 f_X(x;\theta)dx - \int_{-\infty}^{\ell} s_X^2 f_X(x;\theta)dx - \int_r^{+\infty} s_X^2 f_X(x;\theta)dx\right\} +$$

$$+\left\{\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 - \frac{2}{[G(\ell,r;\theta)]^2}\left[\frac{\partial G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right]\int_\ell^r \frac{\partial f_X(x;\theta)}{\partial\theta}dx =$$

$$= \frac{i(\theta)}{G(\ell,r;\theta)} - \frac{1}{G(\ell,r;\theta)}\left\{\int_{-\infty}^{\ell} s_X^2 f_X(x;\theta)dx + \int_r^{+\infty} s_X^2 f_X(x;\theta)dx\right\} +$$

$$+\left\{\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 - \frac{2}{[G(\ell,r;\theta]^2}\left\{\frac{\partial G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{G(\ell,r;\theta)}\left\{i(\theta) - \left[\int_{-\infty}^{\ell} s_X^2 f_X(x;\theta)dx + \int_r^{+\infty} s_X^2 f_X(x;\theta)dx\right]\right\} - \left\{\frac{\partial \ln G(\ell,r;\theta)}{\partial\theta}\right\}^2$$

In modo analogo è possibile ricavare la (5).

Università degli Studi della Calabria
Dipartimento di Economia e Statistica

FILIPPO DOMMA

RINGRAZIAMENTI

L'autore desidera ringraziare i *referees* per i commenti e gli utili suggerimenti che hanno contribuito a migliorare il presente lavoro.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

R. ASSUNÇÃO (1996), *Likelihood Elasticity and Error Bounds*, "The American Statistician", vol. 50, n. 2, pp. 165-67.

O.E. BARNDORFF-NIELSEN e D.R. COX (1994), *Inference and Asymptotics*, Chapman & Hall, London.

D.R. COX e D.V. HINKLEY (1974), *Theoretical Statistics*, Chapman & Hall, London.

C. DAGUM (1977), *A new model of personal income distribution: specification and estimation*, "Economie Appliquée", XXX, 3, pp. 413-437.

C. DAGUM (1980), *The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio*, "Economie Appliquée", XXXIII, 2, pp. 327-367.

F. DOMMA (1997), *Distribuzione asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza dei parametri del modello di Dagum troncato a destra*, Dipartimento di Economia Politica UNICAL, "Discussion paper series", n. 3.

B. EFRON e I.M. JOHNSTONE (1990), *Fisher's Information in terms of the hazard rate*, "The Annals of Statistics", vol. 18, n. 1, pp. 38-62.

I. S. GRADSHTEYN e I.M. RYZHIK (1980), *Table of integals, series, and products*, Academic Press, Inc., New York.

I. GERTSBAKH e A. KAGAN (1999), *Characterization of the Weibull distribution by properties of the Fisher information under type-I censoring*, "Statistics & Probability Letters", 42, pp. 99-105.

N.L. JOHNSON e S. KOTZ (1970), *Continuous Univariate Distributions – I*, John Wiley & Sons., New York.

G. LANDENNA e D. MARASINI (1992), *Teoria della stima puntuale*, Cacucci Editore, Bari.

E.L. LEHMANN (1983), *Theory of Point Estimation*, John Wiley & Sons.,New York.

J.P. MULLOOLY (1988), The variance of left-truncated continuous nonnegative distributions, "The American Statistician", vol. 42, n. 3, pp. 208-210.

L. PACE e A. SALVAN (1996), *Teoria della Statistica. Metodi, modelli, approssimazioni asintotiche*, CEDAM, Padova.

S. PARK (1996), *Fisher Information in Order Statistics*, "Journal of the American Statistical Association", Vol. 91, n. 433, pp. 385-390.

G. ZHENG e J. L. GASTWIRTH (2001), *On the Fisher information in randomly censored data*, "Statistics & Probability Letters", 52, pp. 421-426.

RIASSUNTO

Informazione di Fisher e modelli troncati

In questo lavoro si studia il comportamento dell'informazione di Fisher relativa a funzioni di densità troncate a destra e/o a sinistra in punti noti e costanti. Per una generica funzione di densità si verifica che non si può stabilire se l'informazione diminuisce, aumenta o resta invariata in conseguenza di una troncatura del modello. D'altra parte, restringendo l'attenzione alle famiglie esponenziali mono-parametriche si individuano alcune condizioni che consentono di stabilire l'effetto di una troncatura delle funzioni di densità sull'informazione di Fisher.

SUMMARY

Fisher information and truncated models

In this paper we study the behaviour of the Fisher information for right and/or left truncated density functions, where points of truncation are assumed to be known and constant. In the case of one-parameter exponential families, we present some required to determine the effect of a density function truncation on the Fisher information.